

EXAMENSARBETE

REGULA DE TRI

*En undersökning som visar hur ett äldre matematiskt
tankesätt kan påverka barns problemlösningsförmåga*

BO-LENNART BACKMAN
JOHAN HEDLUND

LÄRARUTBILDNINGARNA

GRUNDSKOLLÄRARUTBILDNING 1-7

Höstterminen 1997

Vetenskaplig handledare: Håkan Broström

Förord

Vårt val av examensarbete föll på ett gammalt tankesätt som inte längre förekommer i grundskolans matematik. Vi ha därför varit tvungna att leta bland äldre litteratur och detta har dock inte alltid varit så enkelt.

Vi vill därför tacka alla som hjälpt oss att hitta stoff till vår bakgrund. Speciellt bör nämnas bibliotekspersonalen på Luleå Tekniska Universitet som hjälpt oss med många krångliga litteratursökningar och förfrågningar, Professor Olof Magne som per brev har lett oss rätt bland litteraturen, samt alla andra lärare som intresserat lyssnat och gett oss tips.

Vi vill också tacka alla som hjälp till med undersökningen, klasser och klasslärare runt om i Norrbotten som ställt upp för pilotundersökningar ofta med kort varsel, vår parktikhandledare Marianne Asplund som under sju veckor handlett oss och naturligtvis hennes klass som stod ut med, enligt egen utsago, sju veckors hård matematiktortyr.

Ett stort tack också till vår handledare på universitet, Håkan Broström, som bidragit med idéer, tips och kritik och alltid entusiastiskt försök få oss att förstå vikten med matematiken.

December 1997.

Bo-Lennart Backman
Johan Hedlund

Backman, B-L., Hedlund, J. (1997). *REGULA DE TRI. En undersökning som visar hur ett äldre matematiskt tankesätt kan påverka barns problemlösningsförmåga*. Luleå: Luleå tekniska universitet. Examensarbete, Lärarutbildningarna 1997:080. ISSN 1402-1595. ISRN LTU-LÄR-EX--97/80--SE.

Abstrakt

Vårt syfte med undersökningen var att med hjälp av matematisk problemlösning, aktualisera regula de tri begreppet. Vi ville undersöka om metoden ökar elevernas förmåga till problemlösning, förståelse för begrepp och enhetsomvandlingar inom matematiken. Utgångspunkten togs i styrdokumentens mål för matematikundervisning. Regula de tri var ett gammalt tankesätt inom matematiken som funnits sedan urminnes tider men har de senaste 25 åren helt försvunnit. Regula de tri handlar om en metod att reducera problem. Speciellt intressant var att anpassa uppgifter och problem som fanns tidigare till dagens läroplan och förutsättningar. Undersökningen genomfördes i en åk 6 i Luleå kommun. Klassen bestod av 18 elever med jämn könsfördelning. Metoden som användes hade tre huvudmoment, hemläxa-problemlösning, hemläxa-räkning och gruppdiskussioner i klassrummet. Resultaten visa att regula de tri metoden i denna undersökning fungerat mycket bra, eleverna fick hjälp av regula de tri att utveckla sitt matematiska problemlösande. Metoden hjälpte också till att fylla ut de matematiska kunskapsluckor som eleverna bevisligen hade.

Innehållsförteckning

Förord	
Abstrakt	
Innehållsförteckning	
Bakgrund.....	1
Presentation.....	1
Vad är regula de tri?.....	1
Regula de tri - ett historiskt perspektiv.....	2
Vad säger våra styrdokument?.....	7
Tidigare forskning.....	9
Syfte.....	13
Metod.....	14
Försökspersoner.....	14
Bortfall.....	14
Material.....	14
Genomförande.....	14
Tidsschema.....	15
Resultat.....	16
Elevernas svar på Provuppgifter 1 och 2.....	16
Diskussion.....	18
Reliabilitet.....	18
Validitet.....	18
Resultatdiskussion.....	18
Enkäter.....	23
Diskussionssammanfattning.....	23
Fortsatt forskning.....	26
Referenser.....	27
Bilagor:	
Bilaga 1:	Matematikprov 1
Bilaga 2:	Matematikprov 2
Bilaga 3:	Enkät 1
Bilaga 4:	Enkät 2
Bilaga 5:	Exempel på problemlösning
Bilaga 6:	Exempel på räkneuppgifter
Bilaga 7:	Exempel på gruppdiskussionsuppgifter
Bilaga 8:	Lektionsplanering
Bilaga 9:	Enkät svar
Bilaga 10:	Lästips

Bakgrund

Presentation

Frågeställningen och idén till vårt arbete har väckts under våra praktikperioder. Efter samtal med lärare på olika stadier har vi fått stöd för våra funderingar om att eleverna blivit sämre på problemlösning. Vi har också fått stöd för detta genom Skolverkets Rapport 119 (1997), *Utvärdering av grundskolan 1995: UG 95. Matematik: årskurserna 5 och 9.*

Vi har ställt oss frågan varför och vad det har för betydelse i den moderna skolan? Det vi direkt kan se är att uppgifterna i läromedlen inte tar upp problemlösningen och problemlösningstrategier i den omfattning som vore önskvärdt. Funderingarna kring ämnet ledde fram till att söka en allmän metod som skulle kunna tillämpas på så många områden som möjligt. På detta sätt kom vi i kontakt med regula de tri. Denna metod är den metod som bäst kan uppfattas som en allmän problemlösningssmetod.

Vad är regula de tri?

Regula de tri kan definieras på olika sätt. Språkligt översatt från latin betyder regula de tri, regeln om tre, dvs att med hjälp av tre kända ta reda på den fjärde. En annan formulering säger "reducera till enheten".

Svenska Akademiens Ordbok (1957) definierar regula de tri enligt följande:

1) räknesätt (i sht förr äv: princip 1. regel för räknesätt) varigenom man (utan användning av ekvation) med hjälp av tre givna storheter beräknar en fjärde sökt storhet som tillsammans med de givna bildar en proportion... (R869)

P.A. v. Zwigbergk (1902) skriver i inledningen till kapitel 5 i sin bok *Lärobok i Räknekonsten med talrika öfnings-exempel*:

Den inbördes storleken hos tvenne storheter af samma slag, hvilka jämföres med hvarandra, kallas förhållande (proportion, ration) dem mellan. Att söka det förhållande, som en storhet har till en annan, är att efterse, huru många gånger (eller till huru stor del) den förra storheten innehåller den senare. (s 157)

Under rubriken *Frågor till muntlig öfning* fortsätter Zwigbergk med att göra en mer ingående definition:

Regula de tri lär att, när tre termer i en analogi äro gifna finna den fjärde. Om a, b, c och d betecknar fyra tal, som äro proportionella, så att $a:b = c:d$, så är produkten af de yttersta lika stor med produkten af de mellersta, nämligen $ad=bc$. Om nu ett af dessa är obekant, erhåller man alltid dess värde genom att dividera den motstående produkten med den bekanta faktor, hvarmed den obekanta är multiplicerad. (s 160)

Fritz Wigforss (1950), en framstående läroplans- och läroboksförfattare under 1940- och 1950-talet definierar regula de tri i *Den grundläggande matematikundervisningen* enligt följande:

Uträkning genom tillbakagång till enheten. (s 129)

Det finns som synes många olika definitioner på begreppet regula de tri. En tydligare definition skulle kunna vara: *En problemlösningstrategi som går ut på att dividera ner talet till enheten och sedan multiplicera upp till det sökta.* I klartext kan ett exempel se ut enligt följande: *15 tavelkrokar kostar 7.50 kr. Du får reda på priset på en tavelkrok då du dividerar 15 krokar med 7.50 kr. Du kan nu multiplicera antalet till det sökta.*

Regula de tri - ett historiskt perspektiv

För ungefär 6000 år sedan började människan att utvinna metaller från naturen, troligtvis någonstans på Sinaihalvön. Detta ledde till att det uppstod ett behov av att kunna mäta och väga. Detta bidrog med nya impulser till byteshandeln som bevisligen är mycket gammal. Ungefär 500 år senare började skriftspråket att användas. System med att härska hade nu blivit så avancerat att det behövdes matematiska kunskaper för att bl.a. kunna kontrollera flera miljoner människor från en regering. (Smith, Vol 1, 1958)

Den matematiska historien äldre än 1000 f.Kr. finns i huvudsak i fyra länder, Egypten, Kina, Mesopotamien och Indien.

I Kina förekommer begreppet regula de tri i flera gamla verk. Det äldsta matematiska verket som man känner till är *Chou-pei*, ett verk som huvudsakligen relaterar till kalendern men också till uråldrig matematik, författaren och årtalet är okänt. Smith (1958) skriver att de verk som betytt mest är *K'iu-ch'ang Suan-shu* eller *Aritmetik i nio delar*. Detta är det största verk bland de kinesiska klassikerna i matematik. Upphovsman och upphovsår är också på detta verk okända men historikerna vet att det inte långt efter att kejsare Chi-huang Ti lät bränna alla böcker år 213 f.Kr., förekom en matematiker som samlade ihop gamla skrifter. Troligtvis var det denne Chiang tsang som satte ihop den upplaga som i dag är känd för världen. Det troliga är att *Aritmetik i nio delar* existerade helt eller delvis före 1000 f.Kr. *Aritmetik i nio delar* är det första verk som tar upp ett begrepp som liknar den regula de tri som vi känner till.

Smith (1958) nämner att i del tre av *Aritmetik i nio delar* tas regula de tri upp:

*...calculating the shares, relating to partner ship
and the rule of three...
(Vol 1, s 32)*

Under 500-talet skrevs ett annat viktigt verk i Kina kallat *Aritmetik i tre böcker*. Boken behandlar bl.a. aritmetiska framsteg, regeln om tre och indeterminanta linjära ekvationer.

Idéerna att en mängd är dubbelt så stor som en annan och ett läderband är hälften så långt som ett annat innehåller båda begreppet förhållande, dessa båda exempel kan man föreställa sig har utvecklats tidigt i människans historia. Skillnaden i exemplen är att det ena har med ett numeriskt förhållande att göra medan det andra syftar mer på ett geometriskt förhållande. När vi kommer till de gamla grekerna tar Nicomachus upp förhållanden och proportionalitet i sin aritmetik, Eudoxus inkluderar proportionalitet i sin geometri och Theon av Smyrna tar upp förhållanden och proportionalitet i sitt kapitel om musik. (Smith, Vol. 2, 1958)

Själva namnet (översatt), regeln om tre, har troligen sitt ursprung hos hinduerna. Regeln om tre nämns på detta sätt i de hinduiska skrifterna Brahmagupta, ca år 628 och i Bhāskara, ca år 1150.

Enligt Smith (1958) definierar Brahmagupta regeln om tre så här:

In the Rule of Three, Argument, Fruit, and Requisition are the name of terms. The first and last terms must be similar. Requisition multiplied by Fruit, and divided by Argument, is the Produce. (Vol 2, s 483)

Enligt Smith (1958) definierar Bhāskara regeln om tre så här :

The first and last terms, which are the argument and requisition, must be of like denomination; the fruit, which is of a different species, stands between them; and that, being multiplied by the demand (that is, therequisition) and divided by the first term, gives the fruit of the demand (that is, the Produce). (Vol 2, s 484)

Regeln om tre kom till västerlandet genom orientaliska köpmän. De hade kommit på att de kunde använda regula de tri som verktyg när de ställdes inför numeriska och matematiska problem. Regeln var så högt uppskattad hos de orientaliska köpmännen att den oftast kallades för "Den gyllene regeln" .

Smith (1958) nämner i sin bok *History of mathematics Volym II*, en berömd engelsk 1600-tals aritmetiker vid namn Hodder som skriver så här:

The Rule of Three is commonly called, The Golden Rule: and indeed it might be so termed: for as Gold transcends all other Mettals, so doth this Rule all others in Arithmetick. (s 486)

Begreppet regula de tri har varit känt och använt i Sverige sedan en mycket lång tid. Den första svenska kända författaren som i ett bevarat arbete tar upp matematik är Peder Månsson. Verket är författat i Rom år 1515 och omfattar främst regula de tri. (Smith, Vol 2, 1958)

Begreppet har funnits i räkneläror sedan 1614 då Aegidius Aurelius gav ut *Arithmetica*, som i Sverige räknas som den första tryckta läroboken i aritmetik.

Aurelius tar upp regula de tri i flera kapitel i sin bok. I inledningen till tionde kapitlet definierar han begreppet på följande sätt:

Fölger nu wijdare then Gyllende Regle/ hwilken både för Nampnet och gagnet skuld wäl wärd är såledhes at kallas/ för then store nytto skuld som hon medh sigh hafwer. Hon blifwer och kallat Regula de tri, för thenna Orsak skul/ at här blifwa allenesta tree ting framstälte. Och om thet fierde skeer altijdh fråghan. (LXVI)

Även AJ. Gothus (1621) nämner i sin bok *Thesaurus Arithmeticus*, thet är een kort och wälgrundat räknekånst en definition:

Efter man är af tre gifna tal söker det fjerde, har denna regel icke obilligt fåt namn af Regula de tri.
(s 17)

Fredric Palmquist (1750) nämner regula de tri i sin bok *Undervisning i Räkne-konsten* under §106:

Efter man här af tre gifna tal söker det fjerde, har denna regel icke obilligt fåt namn af Regula de tri: men hon kallas ock Regula aurea, den gyllende regelen, för dess mångfaldiga ock stora nytta uti det allmänna lefwernet, som vi här efter skole få se. (s 136)

Kring sekelskiftet används regula de tri flitigt i skolböcker och räkneläror. En trolig orsak kan vara att det i undervisningsplanerna från denna tid, trycker på att undervisningen skall vara verklighetsanknuten till hemmet, skolan, arbetslivet och affärslivet. Som exempel kan nämnas Siljeström (1874), *Samling af Räkne-exempel* som till största delen handlar om regula de tri och om sammansatt regula de tri. Även Zweigbergk (1902), *Lärobok i Räknekonsten med Talrika Öfnings-exempel* med första utgåva från 1856, där även den 30:e upplagan från 1902 till stor del tar upp regula de tri. Anjou, Kastman och Kastman (1872) tar upp regula de tri i *Bidrag till Pedagogik och Metodik för Folkskolelärare*. Häftet är en lärarhandledning som till stora delar behandlar regula de tri. Begreppet har med andra ord förekommit i svenska tryckta räkneläror och lärarhandledningar ända sedan 1614.

Räkning och matematik har inte haft någon större plats i läro- och undervisningsplaner förrän i mitten av 1950-talet. I *Undervisningsplan för Rikets Folkskolor den 22 januari 1955* (1955) finns begreppet mycket tydligt uttalat:

Sjätte klassen, ... Fortsatta övningar i de fyra räknesätten med hela tal och bråk jämte tillämpningar: procenträkning, reguladetri, medelvärden. (s 123)

Anvisningar, punkt 10: Metoden att reducera till enheten (reguladetri) bör flitigt komma till användning. Härvid bör emellertid tillses, att eleverna inte vänjes vid att mekaniskt tillämpa ett bestämt uppställningsschema utan övas att resonera sig fram till en riktig lösning . (s 126)

Frits Wigforss (1950) beskriver i boken, *Den grundläggande matematikundervisningen*, utförligt hur regula de tri skall användas i grundskolans undervisning. Wigforss tar upp ämnet och dess praktiska betydelse under rubriken *Regula de tri metoden*. Lösningen av ett problem kan som bekant fås fram genom ett samband mellan de sökta och givna storheterna. Det mest praktiska är när storheterna är proportionella. Wigforss menar att lösningen av problem med denna karaktär mekaniseras för mycket. Man bör sträva efter att låta barnens tanke röra sig så enkelt och naturligt som möjligt. Eleverna bör alltså enligt Wigforss lära sig, att innan de använder regula de

tri noga tänka efter hur talen förhåller sig till varandra.

Halfrid Stenmark (1956), ytterligare en av 50-talets matematikprofeter går på samma linje som Wigforss, då han i handledningen, *Matematikundervisningen i realskola och motsvarande skolformer* tar upp exempel och förklaringar till regula de tri problem. Stenmark behandlar regula de tri mer ur lärardidaktiskt perspektiv.

Som alla former av räkning så har även regula de tri nackdelar och kan inte tillämpas i alla sammanhang. Flera författare, däribland Fritz Wigforss (1950) och Karl Gustav Hellersten (1948), behandlar regula de tri och dess nackdelar. Wigforss tar bl.a. upp ett klassiskt exempel där en man bygger en mur på 10 dagar med 10 timmars arbetsdag, 10 män bygger muren på en dag, 100 män på en timme och 6000 män på en minut. Det matematiskt riktiga svaret stämmer i detta fall inte med verkligheten. Hur kan 6000 män bygga muren effektivt utan att vara i vägen för varann? Wigforss menar att detta skall ses som en begränsning av regula de tri användning. En begränsning så till vida att förnuftet och fantasin skall styra undervisningen, inte formellt räknande. Samma anmärkning som Wigforss gör även Hellersten då han behandlar regula de tri och dess nackdelar i boken *Räknemetodiska grundlinjer*. Hellersten menar att det är viktigt att teckna regula de tri i de olika leden, dvs att eleverna alltid räknar ut värdet på enheten, värdet av ett, även om det kan leda till att mellanledet inte är realistiskt. Han tar upp ett exempel där eleven skall räkna ut mat till hästar. Mellanledet blir i detta exempel $1/50$ häst. En sådan häst existerar inte men det är ändå nyttigt att räkna ut mellanledet för att komma fram till ett svar som är realistiskt i slutändan.

I ett personligt brev till författarna av denna rapport nämner Professor Olof Magne, att det definitiva dödsåret för regula de tri i Sverige kan anges till 1961, då Malte Johansson (1961) i *Handledning i matematikundervisning* tar till sig "den nya matematiken". Malte Johansson skriver handledning i matematik på uppdrag av skolöverstyrelsen. Syftet med handledningen är att hjälpa utbildade lärare med att strukturera upp matematikundervisningen. Johansson bygger sin handledning på den läroplan som skall komma 1962. Detta framgår klart i förordet:

Handledningen överensstämmer i formellt avseende (terminologi, beteckningssätt och redovisningsformer) med de anvisningar, som skolöverstyrelsen kommer att meddela.

I och med 1962 års läroplan togs regula de tri bort från läroplanen. I samband med detta försvann begreppet också från räknelärorna. Ord som proportionalitet och likformighet började att användas i stället för det samlade begreppet regula de tri. Hultman, Kristiansson, Wahlberg (1965) poängterar i *Mellanstadiets Matematikmetodik* att begreppet regula de tri är olyckligt och snarast bör försvinna. Författarna menar att eftersom uppgifterna innehåller två moment bör de behandlas som vilka uppgifter som helst. Regula de tri får enligt författarna inte betraktas som ett räknesätt. På mellanstadiet skall endast uppgifter med karaktär av direkt proportionalitet behandlas. Ett olämpligt exempel kan vara: "8 kuvert kostar 12 öre, hur mycket skall man betala för 5 000 st?".

Hultman, Kristiansson och Wahlberg (1965) använder sig av regula de tri som metod när de ger exempel på proportionalitet, dock med det undantaget att de vill hjälpa eleverna genom att alltid fråga värdet av en/ett som delfråga i uppgiften.

Det finns flera orsaker till att begreppet togs bort från undervisningen i matematik. En trolig orsak till att regula de tri försvann var införandet av den nya matematiken under början och i mitten av 1960-talet. Wiggo Kilborn (1981) beskriver i sin bok *Vad vet fröken om baskunskaper*, hur USA i början av 60-talet satte igång en våg som i huvudsak handlade om att få fram en internationell elit som skulle ta USA upp i rymden. Vågen kom att sprida sig till ett flertal länder. Den nya matematiken slog igenom som en väckelse i Sverige. Stora resurser satsades från SÖ:s sida på matematikprojekt och på att fortbilda landets lärare i den nya tidens anda. Man var under denna period så säker på de nya idéerna att man varken lyssnade på äldre, erfarna metodikers invändningar eller följde upp de amerikanska utvärderingarna. Kilborn (1981) skriver:

Det bör observeras att det här, liksom i USA och andra länder, var det akademiker, dvs högstadie- och gymnasielärare i matematik som med hjälp av bättre ämneskunskaper genomdrev den nya matematiken över huvudet på landets låg och mellanstadielärare.
(s 12)

Adolf af Ekenstam (1984) skriver i sin rapport *Matematikdidaktik. En studie av studier om problemlösning i matematik* att det under 50-talet var på väg att utvecklas en bra och verklighetsanknuten matematik. Detta medförde att uppgifterna blev lättare att lösa och mer anpassade till samhället. Ekenstam hävdar att denna utveckling bröts tvärt under 60-talet genom införandet av "den nya matematiken", och att det i första hand var USA som ställde krav på att matematiken skulle moderniseras. Utvecklingen förde med sig att det flesta länder i Europa, öst som väst, intresserade sig för matematik och matematikundervisning.

Matts Håstad (1982) tar upp samma ämne då han i sin doktorsavhandling, *Svensk matematikundervisning 1950-1980. "Från badkarstal till baskravsprat"*, går igenom den svenska matematikundervisningen. Håstad menar liksom Ekenstam att betoningen i undervisningen på 1950-talet utvecklades till en undervisning där förståelsen stod i centrum. Håstad nämner vidare att undervisningen började att byggas kring Piaget och hans idéer och att det under slutet av 50-talet började läggas större vikt på användningen av laborativa material och ett mer intellektuellt inriktat studium av strukturer. Fackmatematiker och matematikmetodiker framträdde med bestickande idéer som mängdlära, laborativa material mm. Världen accepterade utan omsvep den nya matematiken.

Håstad skriver vidare att den nya matematiken blev något av en frälsningslära. Till den knöts stora förhoppningar att den skulle hjälpa folket att lära sig riktig och väsentlig matematik. Detta avspeglas också i Lgr 69. Håstad hävdar att det i Lgr 69 fanns en stark tro på individens möjligheter att lära sig matematiken på ett förståelseinriktat sätt. Håstad påstår också att man tog avstånd från metoder att få räknefärdighet genom att drilla många liknande uppgifter. I stället skulle man genom laborativt och strukturerat arbete framhäva grundläggande matematiska strukturer. Härigenom

skulle eleverna förstå hur matematiken var uppbyggd. Detta skulle i sin tur leda till goda räknefärdigheter.

Under denna tidsperiod skulle matematiken bygga på förståelse och i högre grad utnyttja varje elevs inneboende förmåga. Stoffinnehållet och tillämpningarna skulle göras moderna och samhällsanpassade. Detta var precis vad politikerna önskade. Skulle den nya matematiken hålla vad den lovade skulle det vara en framgång för skolan. Skulle det gå dåligt hade man någon att skylla ifrån sig på. Under alla omständigheter var den nya matematikens mål så skilt från den dåvarande matematikundervisningen att det avsevärt skulle försvåra jämförelsen med den "gamla" skolan. (Håstad, 1982)

Håstad (1982) går vidare med sin analys in i 1970-talet och menar att misslyckandet med att införa "den nya matematiken" innebar att politikerna fick något att skylla på. Håstad (1982) skriver:

...Under 1970-talet svängde emellertid pendeln tillbaka. Den matematiska inriktningen tonades ner... Bl.a. har moment flyttats till högre årskurser eller utgått. Hänsynstagandet har också kraftigt ändrat de högpresterandes situation, genom att man i olika hänseenden funnit det lämpligt att inte pressa dessa elever.... (s 69)

Sammanfattningsvis innebar den nya matematikens införande att mycket gammal kunskap som lärare och pedagoger hade byggt upp under århundraden försvann. Delar av denna kunskap har till viss del tagits till nåder igen 20 år senare.

Vad säger våra styrdokument ?

Förmågan att kunna lösa problem är nödvändigt för att man skall kunna klara sig i dagens samhälle. Allt större krav kommer att ställas på individen när det gäller initiativförmåga och problemlösning i framtiden. Under det senaste årtiondet har forskarna på allvar börjat intresserat sig för undervisning och inläring i matematik. De flesta forskare är överens om att matematiken till stor del handlar om problemlösning och de menar att skolmatematiken borde genomsyras av problemlösning. Problemlösningen i sig bör inte betraktas som skild från problemlösningsaktiviteter som elever möter i vardagslivet. Matematiken bör istället betraktas utifrån verkligheten. Problemlösningförmåga är enligt forskarna både en färdighet, dvs kräver intuitiv kunskap, och en form av kunskap. (Ahlberg, 1995).

I vårt senaste styrdokument, *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet och de frivilliga skolformerna, Lpo 94*, talas om fyra kunskapsformer: fakta, färdigheter, förtrogenhet och förståelse. För att kunna utveckla problemlösningförmåga och färdighet att lösa matematiska problem behöver eleverna ha adekvata strategier och metoder. Metoden att kunna reducera problemet till dess beståndsdelar, är viktigt för den förståelse som måste utvecklas för att eleverna skall ha någon nytta av sina kunskaper i problemlösning.

I *Kursplan för grundskolan* (1994) under rubriken *Matematik* kan läsas följande:

Utbildningen i matematik skall utveckla elevernas problemlösningsförmåga. Många problem kan lösas i direkt anslutning till konkreta situationer utan att man behöver använda matematikens språk, symboler eller uttrycksformer. Andra problem behöver lyftas ut ur sitt sammanhang, ges en matematisk tolkning och lösas med hjälp av matematiska begrepp och metoder. Resultaten kan sedan tolkas och värderas i förhållande till det ursprungliga sammanhanget. (s 33)

Under rubriken *Mål att sträva mot* (enligt *Kursplan för grundskolan*) går att läsa:

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleven

- α förstå och kan använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande.*
- α förstår och kan formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt tolka och värdera lösningarna i förhållande till den ursprungliga problemsituationen.*
- α kan ställa upp och använda enkla matematiska modeller samt kritiskt granska modellernas förutsättningar, begränsningar och användningar. (s 33)*

Vidare går det att läsa i *Kursplan för grundskolan* under rubriken *Mål att sträva mot* :

- α grundläggande talbegrepp och räkning med reella tal, närmevärden, proportionalitet och procent*
- α olika metoder, måttsystem och mätinstrument för att jämföra, uppskatta och bestämma storlek av viktiga storheter*
- α grundläggande algebraiska begrepp, uttryck, formler, transformationer, ekvationer, olikheter och system av ekvationer som verktyg vid problemlösning och vid beskrivning av olika fenomen. (s 33-34)*

Genom att reglerna de tre ofta kan verklighetsanknytas så är det lätt att ta upp grundläggande teoretisk matematik såsom algoritmräkning, så väl som vanliga måttsystem och praktisk räkning, algebra och ekvationer.

Mål att stäva mot (enligt Lpo 94):

Skolan skall sträva efter att varje elev

- α utvecklar sin nyfikenhet och lust att lära*
 - α lära sig att använda sina kunskaper som redskap för att*
 - formulera och pröva antaganden och lösa problem*
- (s 9)

Mål som eleverna (enligt Lpo 94) skall uppnå i grundskolan:

Skolan ansvarar för att varje elev efter genomgången grundskola

- α behärskar grundläggande matematiskt tänkande och kan tillämpa det i vardagslivet. (s 10)*

Tidigare forskning

Den forskning som finns i ämnet *regula de tri* är begränsad. Den är även till stora delar ålderstigen av förklarliga skäl, eftersom begreppet försvann ur undervisningen i början av 1960-talet. Dock finns mycket omfattande forskning kring problemlösning. Teorierna som forskningen vilar på är tänkt att ge en bild av verkligheten. Forskningen bygger till stor del på antaganden om människans och kunskapens natur.

All matematisk problemlösning utgår från det egna tänkandet. *Regula de tri* är en tankestrategi som skall fungera som katalysator för den matematiska tankeutvecklingen.

Jerlang (1992) sammanfattar Vygotskys teorier. Vygotsky menar att allt tänkande har sin grund och utvecklas i samspelet mellan människor. Med hjälp av en vuxen kan eleven prova på en högre abstraktionsnivå och på detta sätt utveckla sin tankestruktur. Eleven tvingas på detta sätt att formulera den tankestruktur som de tagit del av från en vuxen. Härigenom utvecklas elevens världsbild och språk.

Piaget däremot menar att människan inte kan nå kunskap direkt genom sina sinnen. Kunskapen måste erövrats genom handling, dvs människan måste utföra någon form av övning för att tillgodogöra och befästa ny kunskap. Om elever skall kunna lära sig att minnas något effektivt, måste hon/han först kunna registrera det. Detta kräver en anpassning av nya erfarenheter till gamla kunskaper, och gamla erfarenheter till nya kunskaper. Först när barnet kan konstruera en liten del av sin verklighet genom anpassningsprocessen, kan barnet lära sig detta medvetet. Inläringen bör kopplas samman med förståelsen för att inläringen skall bli meningsfull. Denna syn på kunskap har fått namnet konstruktivism. En senare representant för denna inriktning är Ernst von Glasersfeld. Glasersfeld menar att konstruktivismen i första hand är en filosofi som berör människors försök att genom erfarenheter organisera världen och därigenom skapa kunskap. (Jerlang, 1992)

Även hos Edvard Thorndike finns stöd för teorin att *regula de tri* kan fungera som en strategi för att reducera problem till en förståelig nivå. Om ett matematiskt problem dyker upp kan lösningen av detta underlättas genom koppling mellan lösningsstrategin och

problemet. Thorndike publicerade 1922 en del av sina omfattande studier av det mänskliga tänkandet i skriften *The psykologi of arithmetic*. Karakteristiskt för all inlärning, enligt Thorndike, är att den till en början består av en mängd slumpartade reaktioner (trial and error), vilka till slut bryts ner för att lämna plats för en direkt och rätt reaktion. För att förstå tänkandet måste man enligt Thorndike studera de lagar som bestämmer uppkomsten av tankarna eller idéerna. En tanke eller idé är i ett klassiskt synsätt ett spår av stimuli, dvs en respons. Lagen som bestämmer om en förbindelse (connection) skall upprättas mellan stimuli och respons är mycket enkel. Om två saker a och b ofta uppträtt tillsammans blir följden att a framkallar b i människans tänkande. A och b kan jämföras med t.ex. en väns telefonnummer som är förbundet med hans namn, eller på det sätt en hund kan läras att få salivavsöndring när den hör ett speciellt ljud eller musikstycke. (Ahlberg, 1995)

Unenge och Wyndhamn (1988) tar upp Frank Lesters teorier som de har presenterat i följande lista med 8 punkter över tankeprocessen vid lösning av ett matematiskt problem. Flexibilitet i tänkandet och förmågan att utnyttja den befintliga kunskapen effektivt är av stor betydelse när det gäller att lösa matematiska problem effektivt. De åtta stegen är:

1. Förstå/formulera frågan i problemet/situationen.
2. Förstå villkoren och variablerna i problemet.
3. Välj ut/hitta de data som behövs för att lösa problemet.
4. Formulera delfrågor inom problemet och välj lämpliga lösningsstrategier för dessa.
5. Följ dessa strategier och uppnå dellösningar.
6. Ge ett svar där det finns en referens till de data som givits i problemet.
7. Värdera rimligheten i detta svar.
8. Fundera över rimliga generaliseringar av problemet. (s 16)

Lesters teori kring de åtta stegen, som Unenge och Wyndhamn tar upp, är egentligen en utveckling av Polyas klassiska schema för hur elever löser matematiska problem. Polyas klassiska modell innehåller en strategi om fyra steg och detta står till grund för det moderna problemlösningstänkandet

Det första steget: Att förstå problemet
Vad är det som söks, vad är det som är givet, hur lyder villkoret

Det andra steget: Att göra upp en plan för lösningen.
Har du sett något liknande problem? Känner du till någon matematisk modell som kan användas?
Kan du formulera om problemet?

Det tredje steget: Att genomföra planen.
Kontrollera varje steg i planen. Kan det vara riktigt?

Det fjärde steget: Att se tillbaka
Kontrollera resultatet. Kan det vara rimligt?
Kan du få fram svaret på något annat sätt?
(Polya, 1957)

Många forskare visar på betydelsen av att ha en strategi då man skall bearbeta och lösa problem. Börjesson och Gustavii (1992) tar upp betydelsen av att ha en klar strategi, i sin bok *Pocketbok i problemlösning*.

Vill du lösa ett problem så gäller det att vara klar över hur och vad målet är. Problemlösningsmetodik är ett bra sätt att lyckas skapa bron däremellan, dvs. hur du löser problemet och tar dej fram till målet! Ett problem kan vara litet men du kan tycka att det är stort, av flera skäl. En annan person kan tycka att samma problem verkligen är litet. Problemlösning handlar därmed mycket om våra attityder och förhållningssätt. En god första början på att bli bättre problemlösare är att du stannar upp, innan du sätter igång och löser ett problem på sedvanligt sätt (= som du alltid gjort), och frågar dej: Vad är problemet? (s 10-11)

Vi kan se att läroplaner och styrdokument allt mer har börjat poängtera problemlösningen inom matematiken. I rapporten *Matematik i nationell utvärdering. Vad barn tycker om matematik i årskurs 5* ställer Ljung (1990) frågorna: Hur står det till med undervisningen i problemlösning? Följer lärarna de intentioner som läroplanen förespråkar? Ljung (1990) har undersökt elevernas attityder till olika moment inom matematiken. Problemlösningen upplever eleverna som positiv oavsett vilken prestationsnivå de tillhör. Ljung ifrågasätter om skolan verkligen erbjuder barnen tillräckligt mycket problemlösning på mellanstadiet. Ljung menar att teknikträningen i form av algoritmräkning dominerar på bekostnad av problemlösningen trots dess popularitet. Slutsatsen som Ljung drar av sin utvärdering är att en bättre balans i enlighet med läroplanens intentioner måste eftersträvas och att det finns skäl att fråga sig om problemlösningen har den plats och det utrymme den förtjänar i dagens matematikundervisning på mellanstadiet.

Även Andersson (1988) ställer sig frågan om problemlösningen utkonkurreras av olika mekaniska räkneboksuppgifter. Andersson hävdar att målsättningen för både lärare och elever är att hinna med läroboksbetinget. Det handlar om kvantitet i stället för kvalitet, kappräkning i stället för förståelse. Även mycket duktiga pedagoger sätter matematiken i en särställning och bedriver tyst räkning med veckobetning, helt olikt deras undervisning i andra ämnen.

Andersson (1988) påstår att läraren ofta under tidspress, hjälper eleven förbi de grynnor och skär som eleven stöter på vid lösandet av matematiska problem, utan att därigenom nämnvärt öka elevens förutsättningar att i framtiden på egen hand klara farleden. Våra läromedel tjänstgör alltmer som en "autolots", dvs de lotsar eleven fram genom "kursen" utan att vare sig lärare eller elev behöver lägga ner särskilt stor tankemöda, och utan att undervisningen sätter några djupare spår hos eleverna.

Problemlösningen kräver mycket tankeförmåga och koncentration för att resultatet skall bli tillfredsställande. Det gäller inte bara att ha en klar strategi för att bli en bra problemlösare, många olika faktorer spelar in. Ahlberg (1995) hänvisar till studier gjorda av Lester och Schoenfeld, där de diskuterar olika faktorer som kan påverka den matematiska utvecklingen hos elever på grundskolan. Lester och Schoenfeld lyfter fram och diskuterar

attityder och emotionella faktorer som påverkar problemlösningsförmågan men även elevens syn på sig själv och hur den förutsatta uppgiften ser ut.

Ahlberg (1995) menar att den matematiska problemlösningsförmågan utvecklas som ett samspel mellan en mängd olika faktorer. Ahlberg hävdar att en stor del av forskningen om matematisk problemlösning har varit inriktad på att beskriva vad som skiljer en god problemlösare från en mindre god. Syftet enligt Ahlberg har enbart gått ut på att kartlägga hur de duktiga problemlösarna går till väga, eftersom man då skulle kunna lära elever med matematiska svårigheter, att tänka och handla på samma sätt som experterna.

Syfte

Med hjälp av uppgifter av regula de tri typ, vill vi undersöka om detta ökar elevernas förmåga till problemlösning, förståelse för begrepp som t.ex. skala, area, volym och enhetsomvandlingar inom matematiken.

Metod

Försökspersoner

Vi genomförde undersökningarna i vår praktik-klass, en åk 6. Klassen bestod av 18 elever varav 9 var flickor. En stor del av klassen var svaga matematiker där flera elever inte klarat de nationella proven.

Bortfall

Under det inledande provet föll en elev bort ur undersökningen. Ytterligare ett bortfall fanns vid första provet då en elev var frånvarande just denna dag. Denna elev har däremot fått göra det avslutande provet.

Två andra elever i klassen har fallit bort eftersom de till stor del befunnit sig hos speciallärare. Dessa elever har deltagit under en del av lektionsspansen och fått hemläxorna, men har på grund av kunskapsluckor och koncentrationssvårigheter inte kunnat tillgodogöra sig undervisningen. Eleverna enkätsvar finns dock med i resultatet.

En elev lämnade inte in enkätsvaren då vi genomförde den första undersökningen.

Material

Vi har för vår undersökning av elevernas matematikkunskaper använt oss av två matematikprov, ett prov före praktiken (bilaga 1) och ett prov efter (bilaga 2). Syftet med matematikproven var att undersöka om elevernas kunskaper inom matematisk problemlösning ökat. Enkätfrågor har använts för att komplettera matematikproven och undersöka begränsande faktorer i matematikproven (bilaga 3, 4). Eftersom enkäterna inte har betydelse för undersökningen utan endast fungerar som hjälp för utformning av frågor har vi valt att redovisa dessa i bilageform (bilaga 9).

Den arbetsform vi använde hade tre huvudmoment, hemläxa-problemlösning (bilaga 5), hemläxa-räkneuppgift (bilaga 6) och gruppdiskussionsuppgifter av problemkaraktär (bilaga 7) i klassrummet. Alla hemläxorna löses enskilt i hemmet medan gruppdiskussionsuppgifterna löstes under lektionstid.

Under vårterminen 1997 gick vi ut med en pilotundersökning i olika klasser i Norrbotten. Syftet med detta var att undersöka på vilken nivå undervisningsmaterialet skulle läggas samt vilken undervisningsmetod som kunde vara lämplig att använda under praktiken.

Genomförande

Två veckor innan praktiken genomfördes matematikprov 1 (bilaga 1) och enkät 1 (bilaga 3).

Allt eftersom vi lärde känna klassen så utvecklades en arbetsform och en metod som vi följde i ca. sex veckor. Den arbetsgång (bilaga 8) som användes hade tre huvudmoment, hemläxa-problemlösning, hemläxa-räkneuppgift och gruppdiskussioner i klassrummet. Både problemlösningssuppgifterna och räkneuppgifterna byggde på regula de tri principen där problemlösningssuppgifterna låg på en högre nivå och lösningen krävde minst två delsteg. Räkneuppgifterna var mer kortfattade och användes för att inöva den metod som regula de tri bygger på.

Under praktiken delades varje vecka ut en problemlösningssuppgift, samt en räkneuppgift som hemläxa. Problemlösningssuppgifterna diskuterades i grupp och varje elev fick redogöra för gruppen hur han/hon hade löst problemet. Därefter fick varje grupp en ny uppgift där de skulle diskutera sig fram till en lösning. Lösningen redovisades gruppvis i klassen.

Utöver själva problemet innehöll problemlösningssuppgiften en "Jag vet del" (bilaga 5) som bygger på repetition och en "Tipsdel" (bilaga 5) som bygger på Polyas problemlösningstrategi.

I samband med den sista praktikdagen genomfördes matematikprov 2 (bilaga 2) och enkät 2 (bilaga 4).

Tidsschema

Höstterminen 1996; Val av arbetsområde och PM.

Vintern 1996; Litteraturstudier.

Vårterminen 1997; Skrivning av bakgrund.

Vårterminen 1997; Pilotundersökning

Sommaren 1997; Förberedelser.

Vecka 38, 1997; Provuppgifter 1 och Enkät 1.

Vecka 40 - 46, 1997; Metod och undersökning.

Vecka 46, 1997; Provuppgifter 2 och Enkät 2.

November, December, 1997; Analys, revidering, utvärdering och sammanställning.

December, 1997; Kritik och bedömning.

Resultat

Elevernas svar på Provuppgifter 1 och 2

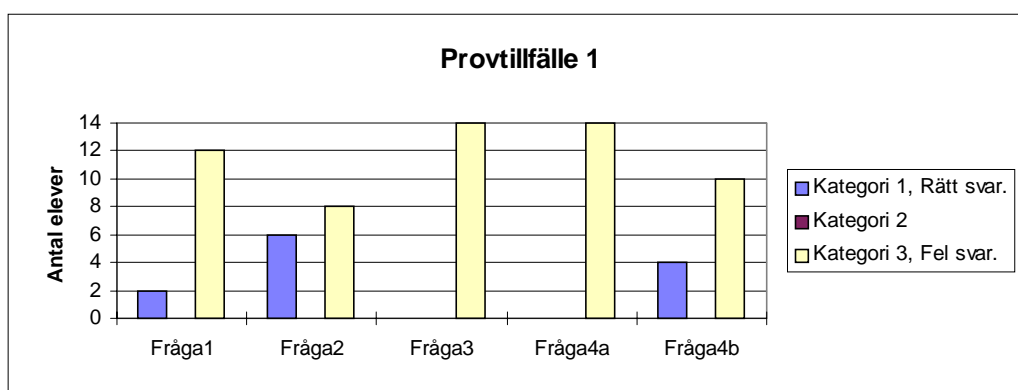
Kategori 1 (Rätt svar): Avser de elever som löser uppgiften helt rätt.

Kategori 2: Avser de elever som förstår lösningsmetoden men gör räknefel eller omvandlingsfel av enheter.

Kategori 3 (Fel svar): Avser de elever som inte kan räkna uppgiften eller inte förstår uppgiften.

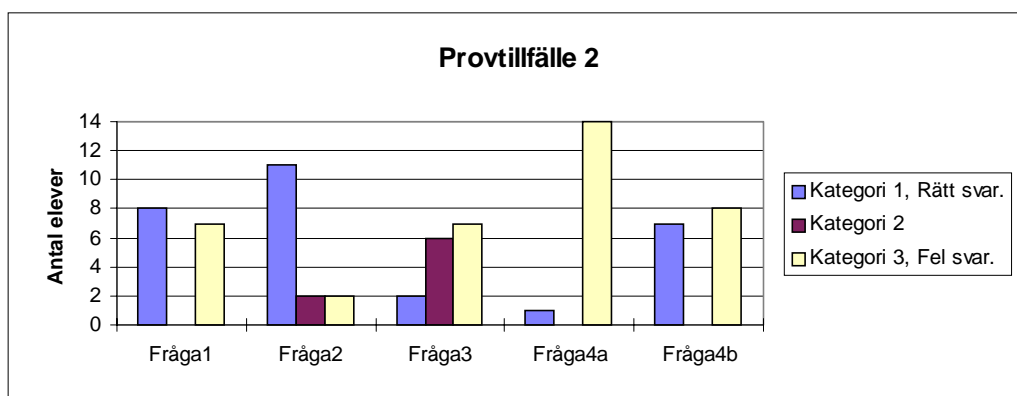
I de fall där inga svar lämnats har vi sammanfört dem under kategori 3.

Samtliga frågor redovisas i bilaga 1 och 2.



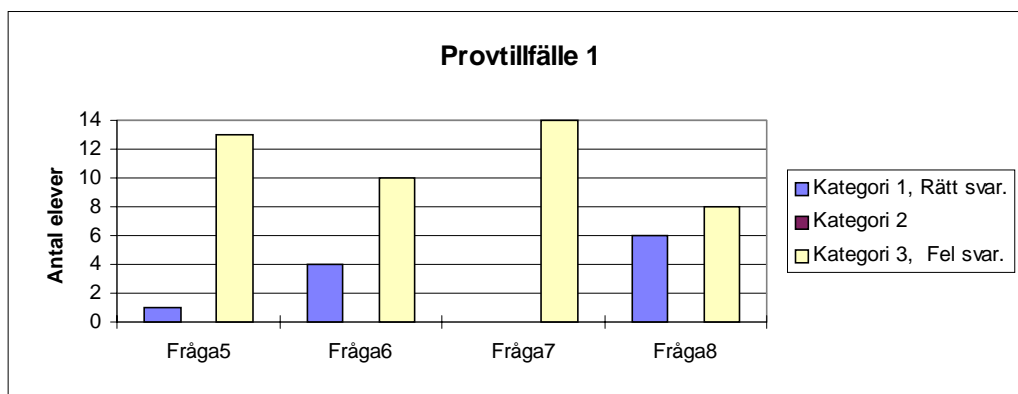
Figur 1. Resultat av elevernas svar på uppgift 1, 2, 3, 4a och 4b vid provtillfälle 1.

Figur 1 visar att lösningsfrekvensen, överlag, på uppgifterna 1, 2, 3, 4a och 4b är låg.



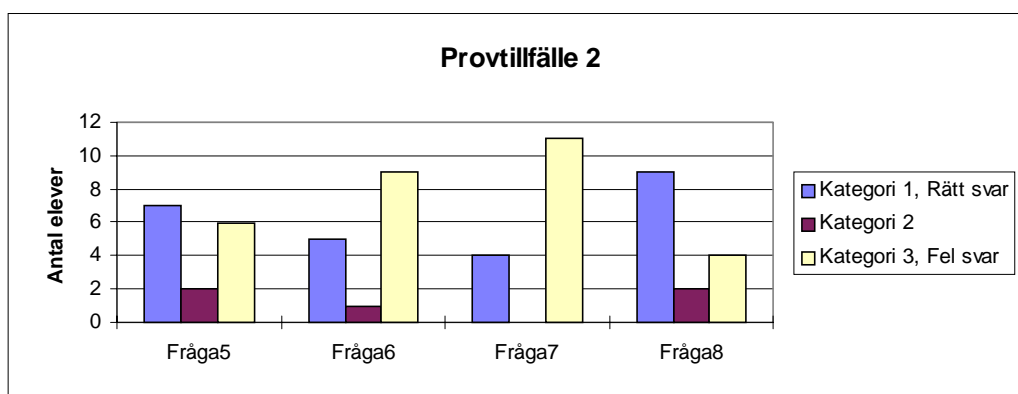
Figur 2. Resultat av elevernas svar på uppgift 1, 2, 3, 4a och 4b vid provtillfälle 2.

Figur 2 visar en väsentlig ökning av antalet rätta svar i de flesta uppgifterna, dock ej 4a, vid provtillfälle 2 gentemot provtillfälle 1.



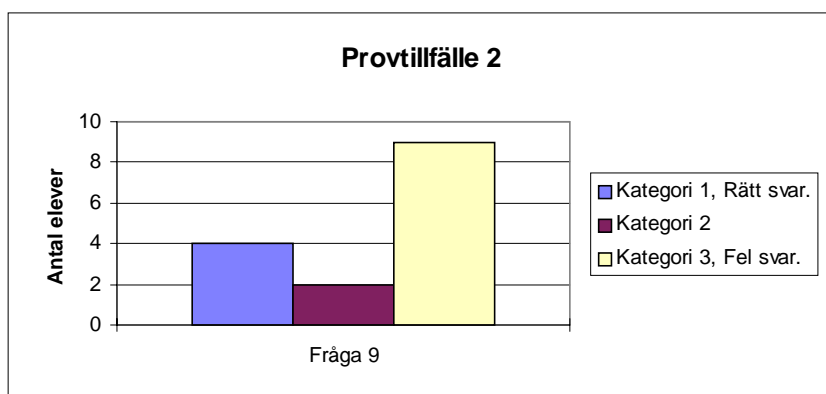
Figur 3. Resultat av elevernas svar på uppgift 5, 6, 7 och 8 vid provtillfälle 1.

Figur 3 visar att antalet rätta lösningar på uppgift 8 skiljer sig från övriga uppgifter.



Figur 4. Resultat av elevernas svar på uppgift 5, 6, 7 och 8 vid provtillfälle 2.

Figur 4 visar en väsentlig ökning av antalet rätta svar vid provtillfälle 2 i jämförelse med provtillfälle 1



Figur 5. Resultat av elevernas svar på uppgift 9 vid provtillfälle 2.

Figur 5 visar resultatet på uppgift 9, som är en uppgift som skall klargöra om sidokunskaper erhållits. Resultatet visar att mer än 1/3 av eleverna hade rätt Lösningstrategi.

Diskussion

Reliabilitet

Proven i sig måste anses reliabla eftersom utförliga lösningar inlämnats. De skriftliga enkäterna har kompletterat de matematiska proven. Reliabiliteten kan styrkas av svaren på enkätfråga 1 (bilaga 9).

Självklart får två extra lärare och den extra tid som tagits i anspråk en positiv inverkan på undervisningen.

Vi anser att svaren från de matematiska proven mycket väl visar elevernas sätt att tänka. Strävan är att svårighetsgraden skall vara likvärdigt vid de matematiska proven. Eftersom arbetet med regula de tri och problemlösning har pågått intensivt i sju veckor så kan detta vara en bidragande orsak till att resultatet utfallit så väl.

Validitet

Validiteten i undersökningen kan anses som god eftersom vi utifrån elevernas inlämnade lösningar kan se hur de löst uppgifterna. Vi kan också utifrån de matematiska proven se hur elevernas problemlösningsförmåga utvecklas.

Redskapen som använts för att mäta detta är som bekant matematiska prov. Vi anser att dessa har fungerat väl och att syftet har uppnåtts på ett tillfredsställande sätt.

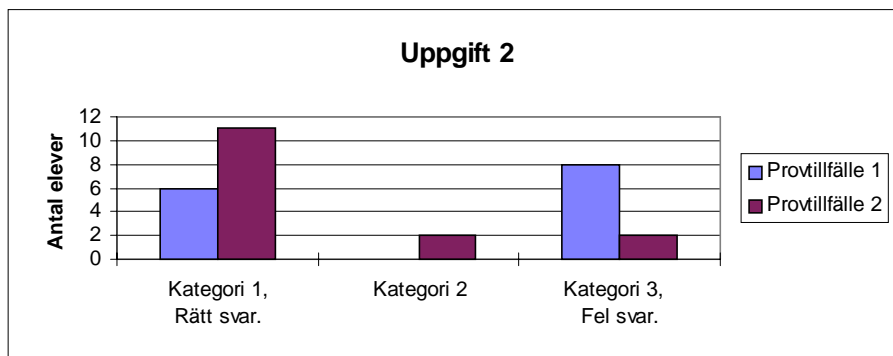
Resultatdiskussion

Vi har genomfört två matematikprov som ingår i undersökningen. Ett prov är genomfört två veckor före praktiken och ett i slutet av praktikperioden. Proven var utformade i två delar, där del ett skulle lösas utan hjälpmedel och där del två fick lösas med hjälp av miniräknare. För att ett korrekt svar skulle godkännas var eleverna tvungna att redovisa en lösningsgång. Alla uppgifter har anknytning till vardagen och är av typen två-stegsuppgifter eller tre-stegsuppgifter. Samtliga frågor redovisas i bilaga 1 och 2.

Alla svar delades in i olika kategorier där kategori 3 utgör den del som har felaktiga eller blanka svar. Kategori 2 utgörs av de svar som har rätt lösningsgång men med små räknefel eller enhetsfel. Slutligen utgör kategori 1 den del av svaren som har en korrekt lösning. Resultatet av undersökningen visar att den totala lösningsfrekvensen inom kategori 2 och kategori 1 ökat från ca. 15% vid provtillfälle 1 till över 50% vid provtillfälle 2. Av resultatet från provtillfälle 1 framgår det att inget av svaren hamnade i kategori 2, dvs den kategori där eleverna förstod problemet men inte kunnat få fram rätt svar i uppgiften. Vid det första provtillfället fanns endast svar av typen som ingår i kategori 1 eller kategori 3, dvs antingen förstod eleverna problemet eller så förstod de inte. Vid provtillfälle 2 finns 58 lösningar som hamnar under kategori 1, dvs helt korrekta svar och 15 lösningar som hamnar under kategori 2, dvs den kategori där eleverna lämnat en sådan lösning att de förstod uppgiften men endast har små räknefel eller små enhetsfel i sitt svar. De flesta uppgifterna vid de båda provtillfällena har varit jämförbara och av typen regula de tri.

Uppgift 1 mäter elevernas begrepp om omvandling och förståelse för enheter. Vid provtillfälle 1 har endast två helt korrekta

lösningar lämnats, ingen lösning hamnade i kategori 2. Vid provtillfälle 2 har åtta helt korrekta lösningar lämnats, inte heller här hamnade någon lösning i kategori 2. Svårighetsgraden ökade på grund av att ett decimaltal infördes i prov 2, vilket kan försvåra den algoritmuppställning som krävs. Detta medför att resultaten från uppgift 1 inte är direkt jämförbara. Trots att svårighetsgraden på uppgiften 1 blev något högre vid provtillfälle 2 har de korrekta svaren fyrdubblats. Eleverna har också till stora delar klarat av lösningsmetoden.



Figur 6. Resultat av elevsvar på uppgift 2 vid provtillfälle 1 och 2.

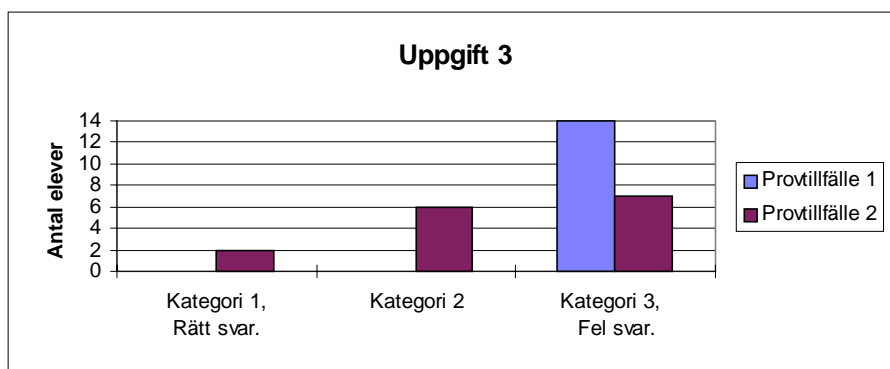
Uppgift 2, Prov 1.

Stinas mamma köper ett rutigt tyg. Hon köper 8 meter och får betala 640 kr. Annas mamma köper 5 meter av samma tyg. Hur mycket får Annas mamma betala?

Uppgift 2, Prov 2.

Kalles mamma köper ett gardintyg. Hon köper 9 meter och får betala 630 kr. Nisses mamma köper 6 meter av samma tyg. Hur mycket får Nisses mamma betala?

Uppgift 2 handlar om enkel regula de tri utan enhetsomvandling. Eleven skall reducera uppgiften till enheten, dvs talet ett. Uppgift 2 i prov 1 och 2 är direkt jämförbara med varandra. Här har en markant ökning skett mellan prov 1 och 2, mer än 70% av klassen har lämnat en helt korrekt lösning vid provtillfälle 2.



Figur 7. Resultat av elevsvar på uppgift 3 vid provtillfälle 1 och 2.

Uppgift 3, Prov 1.

Hur långt är det i verkligheten när avståndet mellan punkterna på kartan är 3,4 cm ?

(Svara i meter) Skala 1:50 000

Uppgift 3, Prov 2.

Hur långt är det i verkligheten när avståndet mellan punkterna på kartan är 3,6 cm ?

(Svara i meter) Skala 1:75 000

Uppgift 3 tar upp förståelsen av begreppet skala och i detta fall är uppgifterna direkt jämförbara vid de båda provtillfällena. Vid provtillfälle 1 har ingen korrekt lösning lämnats. Ingen av de lösningar som lämnats vid provtillfälle 1 har någon form av logiskt lösningsgång som kan kopplas samman till begreppet skala. Observationer under praktikperioden visar att mycket få elever kommit i kontakt med begreppet skala och den låga lösningsfrekvensen gör att funderingar uppstår då uppgiften är verklighetsanknuten och hämtad ur vardagen. Vid provtillfälle 2 har mer än hälften av svaren en korrekt lösningsgång, dock uppstår problem vid enhetsomvandlingar. En orsak till detta kan vara elevernas ovana att räkna med stora tal.

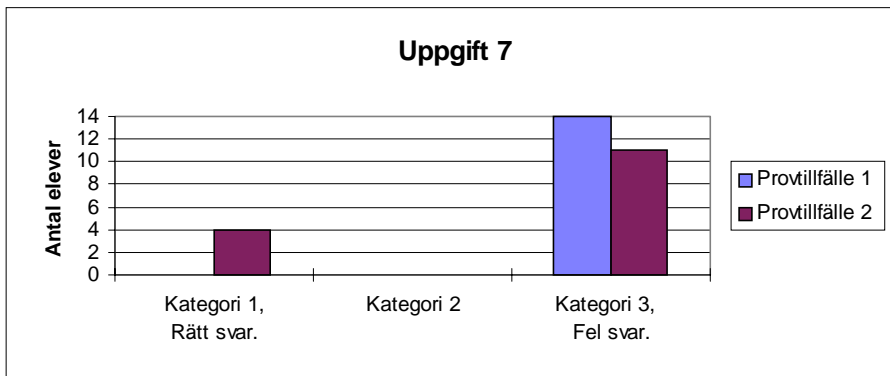
Uppgift 4 behandlar förståelsen av spädning och i detta fall är uppgiften vid provtillfälle 1 något svårare. Att svårighetsgraden är något lägre vid provtillfälle 2 beror till stor del att det står "med text" (bilaga 2) hur eleven skall utföra uppgiften, medan provtillfälle 1 endast ger all information i en "ruta" (bilaga 1). Uppgiften består av två deluppgifter, där del A handlar om spädning och där del B tar upp ren regula de tri med enhetsomvandling. Lösningsfrekvensen på denna uppgift vid de båda provtillfällena är i det närmaste obefintlig. Dock visar svaren på uppgiften vissa brister i det logiska resonemanget och många elever har vid provtillfälle 2 inte insett att resultatet av deras lösning blir att de endast använder vatten när de skall måla i deluppgift B. En orsak till att ett felaktigt svar erhålls under deluppgift A är att eleverna inte vet att det är frågan om totalt 6 delar när det står "1 del färg och 5 delar vatten" eller totalt 5 delar när det står "1 del saft, 4 delar vatten". Uppgifterna 4b kan inte anses som helt jämförbar eftersom uppgiften vid provtillfälle 1 är mer konkret. Vid provtillfälle 2 är uppgiften 4b redan reducerad till enheten. Det är anmärkningsvärt att ingen elev löst deluppgift A vid provtillfälle 1 och endast en korrekt lösning har lämnats vid provtillfälle 2. Anmärkningsvärt därför att denna uppgift behandlar ett vardagsproblem som alla elever kommit i kontakt med.

Uppgift 5 tar upp begreppet bråk. Vid provtillfälle 1 har endast en korrekt lösning lämnats. Många av de svar som lämnats har kommenterats av eleverna själva att de gissat att $1/5$ är någonting mittemellan $1/4$ och $1/6$. Inget av svaren från provtillfälle 1 hamnar under kategori 2. Vid provtillfälle 2 har sju helt korrekta lösningar lämnats plus att två lösningar hamnar under kategori 2. Av de svar som lämnats vid provtillfälle 2 är många fortfarande rena gissningar. Uppgiften 5 kan göras mer jämförbart om talen vid provtillfälle 2 utformats annorlunda.

Uppgift 6, den sista av uppgifterna på del ett, dvs den del som löses utan hjälpmedel. Uppgiften bygger på ren regula de tri och enhetsomvandling. Lösningsgången är att se sambandet mellan enheterna och omvandla gram till hektogram. Uppgiften 6 vid de båda provtillfällena är inte siffermässigt tillräckligt lika för att vara direkt jämförbar. Eleverna bör ändå med "kortdivision" kunna lösa uppgiften. Svårighetsgraden vid provtillfälle 2 höjs eftersom det är ett tresiffrigt tal som måste delas. Vid

provttillfälle 1 kan eleverna, om de ser enhetsomvandlingen, göra uträkningen i huvudet. Huvudräkningen är dock svårare att göra vid provttillfälle 2. Lösningstakvnsen ligger ungefär lika vad det beträffar de olika provttillfällena. En orsak kan vara att eleverna inte kunnat se sambandet mellan gram och hektogram, en annan orsak kan vara att eleverna inte klarar av att använda den algoritm som behövs.

Uppgift 7, 8 och 9 är den del av provet där eleverna får använda hjälpmedel, dvs miniräknare. Uppgifterna är konstruerade så att de metodmässigt inte skall vara svårare än uppgifterna i del ett, dock är talen anpassade för lösning med miniräknare.



Figur 8. Resultat av elevsvar på uppgift 7 vid provttillfälle 1 och 2.

Uppgift 7, Prov 1.

En tub Kalles Kaviar innehåller 180 gram kaviar och kostar 12,60 kr. Vad kostar en burk på 1,5 kg om kilopriset är lika?

Uppgift 7, Prov 2.

En tub med Amerikansk Hamburgerdressing innehåller 220 gram dressing och kostar 13,20 kr. Vad kostar en burk på 1,5 kg om kilopriset är lika?

Uppgift 7 i de båda delproven är likvärdiga i svårighetsgrad. Uppgifterna bygger på decimaltal och enhetsomvandling av typen rak regula de tri eller rak proportionalitet. Vid provttillfälle 1 har ingen korrekt lösning lämnats och ingen av lösningarna har någon form av korrekt resonemang. Vid provttillfälle 2 har fyra korrekta lösningar lämnats, bland dessa fyra varierar enhetsomvandlingarna mellan gram, hektogram och kilogram. Övriga svar från provttillfälle 2 finns fortfarande under kategori 3. Att antalet rätta lösningar, om en jämförelse görs med uppgift 6 vid provttillfälle 2, sjunkit kan bero på att talen i uppgiften nu är svårare och detta kan ha en avskräckande effekt. Detta kan också bero på en ovana hos eleverna att använda miniräknare.

Uppgift 8, vid provttillfälle 1, är en areauppgift vars lösning inte kräver hjälp av regula de tri. Uppgiften bygger på att räkna ut det totala antalet plattor som ryms på den yta som söks och slutligen göra en uträkning av det totala priset på de antal plattor som åtgår. Tanken är att eleverna skall räkna ut antalet plattor på respektive sida och göra en multiplikation. Regula de tri kan i detta fall vara en hjälp, men kräver dock ett extra tankesteg. Svaren från provttillfälle 1 visar många korrekta lösningar och korrekta resonemang kring uträkningen. En trolig orsak till detta kan vara att areabegreppet behandlats flitigt i

den räknebok som eleverna använder. Av de sex lösningar som är helt korrekta har några elever konkret försökt att rita in plattorna i figuren till uppgiften. För dessa uppstod dock vissa problem då figuren inte var ritad i skala. Uppgift 8 vid provtillfälle 2 har en något annorlunda lösningsgång. Uppgiften kräver ett rent regula de tri tänkande och blir därför ej helt jämförbar med uppgift 8 vid provtillfälle 1. Nio lösningar är helt korrekta och ytterligare två lösningar finns under kategori 2. Vid de båda provtillfällena visar några elever som hamnat under kategori 3 att de inte gör någon skillnad på omkrets- och areabegrepp.

Uppgift 9 vid provtillfälle 2 är en uppgift som är tänkt att mäta om eleverna förstått uppgiften utan att egentligen tränat på detta, dvs om en sidoeffekt skapats. Denna uppgift bygger på omvandlingen mellan liter och kubikmeter. Svårighetsgraden i denna uppgift är högre p.g.a. enheterna och valet av talen. Trots svårighetsgraden finns sex lösningar med rätt lösningsgång, fyra av lösningarna är helt korrekta och två lösningar har endast ett mindre enhetsfel. En elev har muntligt redovisat rätt svar och korrekt lösningsmetod, men eleven har inte dokumenterat lösningsgången på provpappret. Vid provtillfället observerades elevens lösningsgång och därför hänförs dennes lösning under kategori 1, dvs rätt svar. Av resultatet i uppgift 9 kan det tydligt konstateras att vissa elever tagit till sig regula de tri metoden samt att en viss sidoeffekt skapats vad beträffar begrepp som liter, kubikmeter och gram.

Observationer vid bl.a. läxrättning och gruppdiskussioner kan konstateras är att de bra och medelbra eleverna väl tar till sig undervisningen. De elever som inte hunnit så långt i sitt matematiska tänkande har givits ett hjälpmedel som de kan använda vid problemlösning. Dock kan det konstateras att de dessa elever inte har säkerheten att kunna tillämpa detta hjälpmedel i svårare sammanhang. För att kunna nå fram till de dessa elever krävs det betydligt längre undervisningstid än sju veckor. Önskvärt vore att eleverna gavs möjlighet att börja med undervisning i regula de tri redan i åk 4.

Det som kunnat observeras är att när eleverna ställs inför konkret problemlösning så inser de att de har luckor i sin matematikkunskap. Vad beror detta på? Är det så att eleverna tror att de kan matematik eftersom de kan räkna i sin matematikbok eller är det så att matematikböckerna inte ger eleverna tillräcklig utmaning?

De prov som genomförts, bygger på matematisk problemlösning, och bör ses som ett inläringstillfälle där eleverna inser målet med matematikundervisningen och får svart på vitt vad de lärt sig. Eleverna skall med hjälp av proven få en draghjälp framåt i sin matematiska inläring. Eleverna kan också utifrån provens utmaning stimuleras i sin matematikundervisning och få en mer positiv syn på matematiken. Proven kan också utgöra underlag för utvecklingssamtal där föräldrarna lättare kan se innehållet och målsättningen med skolans matematikundervisning.

Enkäter

Den enkätundersökning som är gjord i samband med provtillfällena är tänkt att belysa elevernas begränsande faktorer när det gäller matematiska problemlösningsuppgifter. (bilaga 9)

De slutsatser som kan dras av enkätundersökningens resultat är att eleverna har kommit till insikt om deras begränsningar i algoritmräkning. Detta har också observeras vid ett flertal tillfällen när elever rent spontant sagt:

- " Jag kan ju dividera om jag kan multiplicera"
- " Jag kan inte kortdivision"
- " Om jag tränar multiplikation så kan jag dividera" .

Diskussionssammanfattning

Syftet med vårt arbetet är att försöka introducera en matematisk problemlösningsstrategi. Strategin som tillämpats kallas för regula de tri och är ett tankesätt där det gäller att reducera det matematiska problemet för att få en angreppsvinkel på det.

Under den första praktikveckan växte arbetsmetod och arbetssätt fram. Inspiration hämtades ur Andrejs Dunkels (1996) doktorsavhandling *Contributions to mathematical knowledge and its acquisition* som även lagt grunden för lektionsplaneringen (bilaga 8). Det är dock till största del klassens sammansättning och kunskapsnivå som styr detta val. Eftersom många elever i klassen är väldigt oroliga och har svårt att koncentrera sig blir stämningen i klassen också ganska orolig. Vi provar därför att ge eleverna hemläxor med förhoppning att de skall ha mer tålamod och bättre koncentration hemma. Detta faller mycket väl ut. Den arbetsform vi använder bygger mycket på hemläxor och gruppuppgifter. Arbetsformen (bilaga 8) har tre huvud moment:

- Hemläxa-problemlösning,
- Hemläxa-räkneuppgift
- Gruppdiskussioner i klassrummet.

Därtill kommer kortare moment med repetition av multiplikation och division.

Problemlösningsuppgiften, som löses i hemmet, är konstruerad enligt regula de tri princip och går ofta ut på omvandling mellan enheter (bilaga 5). Nivån ligger lite högre än elevernas egentliga kunskaper. Syftet med detta är att eleverna skall utveckla sitt tänkande, ta tid på sig, sitta ner, fundera och reflektera över problemet. Denna förmåga till reflektion saknas ofta hos eleverna, de har alldeles för bråttom. Det viktigaste med problemlösningsuppgiften är reflexionen över problemet, inte den matematiskt korrekta lösningen.

På problemlösningsuppgiften finns varje gång en repetitionsdel " Jag vet att.." (bilaga 5), där eleverna skall träna sig på omvandling mellan enheter. Tanken med detta är att eleverna skall kunna använda detta när de löser problemet och samtidigt träna på omvandlingar. På problemlösningsuppgiften finns även en " Tipsdel" (bilaga 5). Idén med tipsen är att eleverna skall få hjälp med en angreppsvinkel på problemet. Vi har under arbetets gång funnit att elever över lag saknar problemlösningsstrategier och klara strukturer för sitt tänkande. Tanken med tipsen är att ge eleverna hjälp att komma vidare i sitt matematiska tänkande.

Tipsen är en problemlösningstrategi som Polya (1957) beskriver i sin bok *How to solve it*. Tipsen har modifierats så att de passar att använda i en årskurs 6. Punkterna som används är följande:

- Vad söks?
- Vad vet jag?
- Hur gör jag för att få fram svaret?
- Kan jag skriva om problemet med egna ord?
- Räkna ut!!
- Gå tillbaka och kontrollera, är svaret rimligt, har jag räknat rätt?

Eleverna får också en räkneuppgift varje vecka som de skall göra hemma. Tanken med detta är att försöka få eleverna att befästa sina tankar och kunskaper som de har använt vid problemlösningen. Även räkneuppgifterna bygger på regula de tri principen. Räkneuppgifterna bygger till stor del på de problemlösningssuppgifter som eleverna behandlat tidigare, dock med något lättare tal. Räkneuppgifterna har mer, än problemlösningssuppgifterna, karaktär av rätt eller fel, därför rättas uppgifterna och kortare genomgångar hålls. Vid genomgångarna observeras att många elever har stora koncentrationssvårigheter och att det är få elever som gör anteckningar. De som gör anteckningar är oftast de som redan löst uppgifterna rätt.

Under arbetet med regula de tri uppstår komplikationer. Eleverna upptäcker att de inte kan multiplikationstabellen tillfredsställande, detta medför i sin tur att divisionen blir lidande. Eftersom regula de tri går ut på både division och multiplikation finns ett behov att träna både multiplikationstabellen och divisionsalgoritmer. Detta utförs vid ett flertal tillfällen under den sju veckors period som arbetet pågår med klassen. Vi stöter också på problem när det gäller all division. Eleverna i klassen använder en räknebok som till stor del koncentrerar sig på kortdivision. De flesta elever har bara kommit i kontakt med den korta divisionen. Räkneboken tar upp liggande stolen väldigt sent och bara ett fåtal av eleverna kan denna divisionsalgoritm tillfredsställande. Vi anser oss tvungna att sätta in övningsuppgifter som tränade både kortdivision och liggande stolen. Detta moment försvåras ytterligare av att föräldrarna inte kan liggande stolen så att de kan hjälpa sina barn.

Liksom hos alla former av verklighetsanknuten matematik och problemlösning kan det uppstå problem när uppgifter konstrueras, detta gäller också regula de tri. Exempelen och övningarna måste göras med omsorg och sunt förnuft. Matematiken måste vara omväxlande och tankealstrande så att eleverna får använda sin fantasi och kreativitet. Uppgifter och övningar måste vara utformade så att de inte blir ett mekaniskt bollande med enheter och siffror och så att de inte hänger upp sig på orealistiska teknikaliteter. Regula de tri metoden skall fungera som ett hjälpmedel vid matematisk problemlösning, samtidigt skapa förståelse och förtrogenhet för matematiska begrepp. Regula de tri fungerar också som en länk mellan matematiken i skolan och verkligheten. I och med dess användbarhet och koppling till vardagsnära problem kan regula de tri fungera som ett redskap som eleverna skall kunna använda både i skolan och i verkligheten. Regula de tri ställer höga krav på eleverna. De måste kunna

formulera, tolka, lösa och ställa upp problem. Genom att begreppet är sammansatt anser vi att eleverna måste kunna tänka i ett vidare perspektiv än vad som är vanligt i dagens läromedel. I *Lpo 94* finns dessa punkter klart och tydligt uttalade, i läromedlen däremot så tillgodoses de inte i tillräcklig utsträckning. Regula de tri modellen kan här fungera som ett komplement till läromedlen. Vi anser också att det är viktigt att ge eleverna tankestrukturer och modeller för att kunna tillämpa problemlösning. Även här så är dagens läromedel otillräckliga. De vi kan konstatera är att de elever som under sju veckor intensivt jobbat med regula de tri metoden har blivit betydligt bättre på att finna olika infallsvinklar för att angripa matematiska problem. Arbetet har resultatmässigt gått över förväntan. Många av eleverna kunde i början inte föra ett logiskt resonemang utifrån en matematisk problemlösningssuppgift. I slutet av perioden löste samma elever problemlösningssuppgifterna helt korrekt. Elever som hade mycket vaga begrepp om enheter och problemlösning när arbetet startade, visade stora framsteg i slutet av arbetsperioden. Vi tror att många av eleverna saknade klara strukturer för sitt matematiska tänkande eftersom deras läromedlen inte gett dem det. Överlag saknar dagens läromedel klara strukturer för matematiskt tänkande. Läromedlen behandlar ofta matematiska områden kapitelvis. Detta innebär att eleverna inte ser helheten i matematiken.

Tankesättet regula de tri förutsätter att eleverna behärskar både multiplikation och division. I gamla metodikböcker och lärarhandledningar börjar metoden och tankesättet att användas i årskurs fem och sex. Vi tror dock att man med fördel kan börja med enkel problemlösning av regula de tri typ redan i åk tre då eleverna fått grunderna för att kunna hantera multiplikation och division. Regula de tri begränsas dock inte till mellanstadiet. Begreppet är i sig är ett förstadium till proportionalitetsbegreppet som kommer in i fysik, kemi och matematik på högstadiet. I själva verket så kan en stor del av matematiken på mellanstadiet betraktas som regula de tri, bråk är ett bra exempel. Här gäller det att ta reda på hur mycket delen är av det hela. För att nå fram till detta måste man gå steget via siffran ett, t ex $3/5$. Detta är i själva verket $3 \times 1/5$. Vet jag vad $1/5$ är så kan jag enkelt ta reda på $3/5$. Vi anser att regula de tri tänkandet är en nödvändighet för att få eleverna att förstå svårare begrepp och kunna ta till sig problemlösningen. Många goda matematiker har säkert regula de tri tänkandet intuitivt, de svagare eleverna däremot förstår inte detta om de inte får det förklarat för sig.

Regula de tri bygger som bekant på ett gammalt beprövat tankesätt, detta kan inte minst ses i vår historiska tillbakablick i början av rapporten. Tankesättet har funnits vedertaget i många hundra år, men idag får eleverna lita till sin intuition och till sin egen förmåga om de skall kunna ta del av det goda redskap som regula de tri bevisligen är. Är det verkligen rätt att eleverna intuitivt skall fundera ut metoder som andra har utvecklat under lång tid. De allra duktigaste eleverna har kanske möjlighet att själv klura ut metoder som regula de tri.

Vi anser att skolan idag är lyckligt lottad då det finns gamla lärare som har en stabil kunskapsgrund att stå på och som kan visa de svagaste matematikerna hur man skall tänka för att utvecklas, lärare som fick sin utbildning innan 60-talets nya idéer tog

överhanden. Inom några år kommer inte dessa gamla trotjänare att finnas kvar i skola. Vad händer då? Fram till mitten av 1960-talet användes metoder och tankesätt som utprovats i flera hundra år bl.a. regula de tri. Med ens blåstes dessa tankesätt undan av "den nya matematiken" som ju bekant helt misslyckades. Vi har idag byggt upp våra läromedel och tankesätt från grunden igen utan att ta hänsyn till det gamla som var bra. Idag genomsyras skolan av nya idéer. Skolan skall anpassas till samhällets svängningar som IT, data, ny pedagogik mm. En anpassning som många gånger sker utan att man behåller det gamla som varit bra.

Vi anser att vi med hjälp av regula de tri har lyckats fylla ut en del kunskapsluckor som bevisligen fanns i klassen och detta på den relativt korta tid som fanns till förfogande. Resultatet av vår undersökning visar att regula de tri metoden har fungerat över förväntan. Klassläraren har efter vårt arbete uttryckt positiva åsikter och menar att eleverna utvecklats i sitt matematiska tänkande. Framförallt har eleverna blivit bättre på problemlösning i allmänhet och enhetsomvandling i synnerhet.

Metoden och arbetssättet har framförallt engagerat klassen och föräldrarna. Det som redovisas i denna rapport har också väckt intresse bland övrig personal på skolan där praktiken genomfördes. Vi hoppas att våra idéer och tankar fortsätter att intressera lärarkåren och övriga som deltar i skoldebatten.

Fortsatt forskning

Ämnet som denna undersökning behandlar skulle kunna utvidgas på många olika sätt. Undersökningar som denna skulle vara intressanta att genomföra i en längre tidsperiod och med fler försökspersoner. Förslagsvis kan arbetet med regula de tri tankar påbörjas redan i åk 3 eller 4. Utvärderingar och tester kan göras mer omfattande för att få en mer klarlagd elevsyn på regula de tri. Det skulle vara av intresse att genomföra vidare tester på klassen när det kommit upp på högstadiet för att se om effekten av sju veckor regula de tri undervisning sitter kvar.

Det skulle också vara intressant att jämföra elever som arbetet med problemlösning baserat på regula de tri tänkande kontra dagens arbetsmetoder som bygger på elevens eget sökande efter kunskap.

En längre undersökningsperiod i en större undersökningsgrupp kan anses ge ett mera tillförlitligt resultat. Det är också önskvärt med en referensgrupp som resultaten kan jämföras mot.

Referenser

- Ahlberg, A. (1995). *Barn och matematik*, Lund: Studentlitteratur.
ISBN 91-44-38431-9
- Andersson, K (1988). *Läroboken - en autolots. Nämnaren Nr.1*
Stockholm: Utbildningsförlaget. ISBN 91-47-02878-5
- Anjou, L.Chr., Kastman, K.W. & Kastman. K.A. (1872). *Bidrag till
Pedagogik och Metodik för Folkskolelärare. (Häfte V. Metodik;
Räknekonsten i Folkskolan)* Karlstad: Hjalmar Petersson & C:o
- Aurelius, A. (1614). *Arithmetica* Uppsala: Eschillo Matthia
- Börjeson, L. Gustavii, K. (1992). *Pocketbok i problemlösning.*
Stockholm: CE Fritzes AB. ISBN 91-38-92181-2
- Dunkels, A. (1996). *Contributions to mathematical knowledge and
its acquisition.* Luleå: Högskolan i Luleå, Diss. 1996:202D.
ISSN 0348-8373
- Ekenstam, A. af (1984). *Matematikdidaktik. En studie av studier om
problemlösning i matematik.*, Linköping: Lärarutbildningen vid
Universitetet, 1984:111
- Gothus, AJ. (1651). *Thesaurus Arithmeticus, thet är een kort och
wälgrundat räknekånst* Stockholm
- Hellsten, C. G. (1948). *Räkne metodiska Grundlinjer, andra
upplagan*, Stockholm: P.A. Norstedt & Söner,
- Hultman, Kristiansson, Wahlberg, (1965). *Mellanstadiets
Matematikmetodik.* Gävle: Skolförlaget Gävle AB,
- Håstad, M. (1982). *Svensk Matematikundervisning 1950 - 1980. " Från
badkarstal till baskravsprat" .* Malmö: Matts Håstad och
Utbildningsproduktion AB. ISBN 91-568-0117-3
- Jerlang, E. (Red.). (1992). *Utvecklingspsykologiska teorier.*
Arlöv: Almqvist & Wiksell Förlag, ISBN 91-21-11324-6
- Johansson. M. (1961). *Handledning i matematikundervisning.*
Halmstad: Kungliga skolöverstyrelsens skriftserie 47,
- Kilborn, W. (1981). *Vad vet fröken om baskunskaper.* Stockholm:
Wiggo Kilborn och Liber UtbildningsFörlaget. ISBN 91-40-70578-1
- Kungliga Skolöverstyrelsen. (1955). *Undervisningsplan för Rikets
Folkskolor den 22 januari 1955.* Stockholm: Svenska Bokförlaget
Norstedts
- Kungliga Skolöverstyrelsens. (1963). *Läroplan för grundskolan,
Skriftserie 60.* Stockholm
- Ljung, B-O. (1990). *Matematiken i nationell utvärdering. Vad
barnen tycker om matematiken i årskurs 5. Rapport från PRIM-
gruppen nr 3.* Stockholm: Institutionen för pedagogik. Högskolan
för lärarutbildning i Stockholm.

- Ljung, B-O. & Pettersson, A. (1990). *Matematikem i nationell utvärdering. Kunskaper och färdigheter i årskurserna 2 och 5*. Stockholm. ISSN 1101-1475
- Palmquist, F. (1750). *Undervisning i Räkne-konsten*. Stockholm: Lars Salvii
- Polya, G. (1957). *How to Solve It, (2nd ed.)* Princeton: Penguin Books
- Siljeström, P.A. (1874). *Samling af Räkne-exempel 2:a uppl.* Stockholm
- Smith, D.E. (1958). *History of mathematics Volume 1*. New York: Dover Publications, Inc. ISBN 0-486-20429-4
- Smith, D.E. (1958). *History of mathematics Volume 2*. New York: Dover Publications, Inc. ISBN 0-486-20430-8
- Statens skolverk. (1997). *Utvärdering av grundskolan 1995: UG 95. Matematik: årskurserna 5 och 9*. Stockholm: Skolverket, Skolverkets rapport 119, ISRN: SKOLV-R--119--SE
- Stenmark, H. (1956). *Matematikundervisningen i realskolan och motsvarande skolformer*. Lund: GWK Gleerups
- Svenska Akademiens Ordbok*. (1957). Band 21, R869. Lund
- Unenge, J. & Wyndhamn, J. (1988). *Problemlösning. Täljaren, Studiematerial i matematik* Kristianstad: Utbildningsförlaget. ISBN 91-47-02874-2
- Utbildningsdepartementet. (1994). *Kursplaner för grundskolan*. Stockholm: Fritzes. ISBN: 91-38-30261-6
- Utbildningsdepartementet. (1994). *Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet och de frivilliga skolformerna. Lpo 94*. Stockholm: Utbildningsdepartementet. ISBN 91-38-30246-2
- Wigforss, F. (1950). *Den grundläggande matematikundervisningen*. Stockholm: AB Magnus Bergvalls Förlag
- Zweigbergk, P.A. v. (1902). *Lärobok i Räknekonsten med talrika öfnings-exempel*. Stockholm: Ivar Häggström & Boktryckeri AB.

3. **Hur långt är det i verkligheten när avståndet mellan punkterna på kartan är 3,4 cm ? (Svara i meter)**

Skala 1:50 000

4. **Apelsin saft**

Deklaration Apelsinsaft Volym: 1,5 l Spädning: 1 del saft, 4 delar vatten
--

A) Du blandar hela flaskan hur mycket färdigblandad saft får du då?

B) Servera saften i glas som rymmer 2 dl. Hur många glas räcker saften till?

5. Hur många minuter är $\frac{3}{5}$ av en timme?
6. Ett paket torskfilé väger 300 gram och kostar 27 kr.
Hur mycket kostar 2 kg?

Namn:.....

Klass:.....

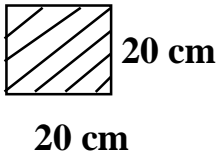
Använd miniräknare.

Förklara hur du räknar!

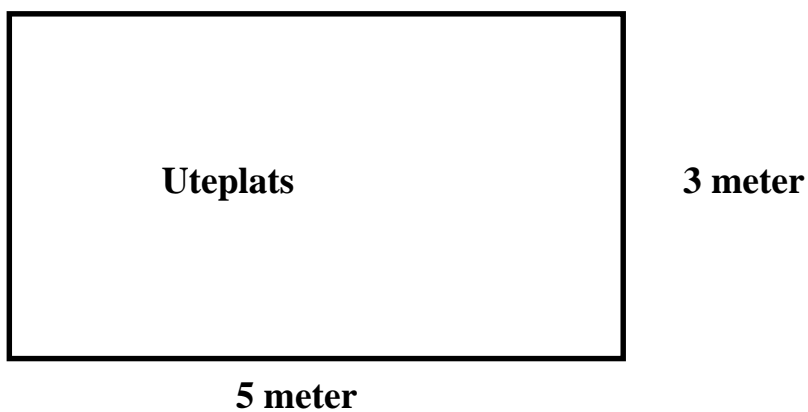
- 7. En tub Kalles Kaviar innehåller 180 gram kaviar och kostar 12,60 kr.
Vad kostar en burk på 1,5 kg om kilopriset är lika?**

8. Rita gärna och tänk!! Använd miniräknare.

Betongplatta



Kalle skall lägga plattor på sin uteplats.
Hur mycket kommer det att kosta
om varje platta kostar 9 kr?



- 3. Hur långt är det i verkligheten när avståndet mellan punkterna på kartan är 3,6 cm ? (Svara i meter)**

Skala 1:75 000

- 4. Kalle köper en 2,5 litersburk med golvfärg. För att kunna måla måste Kalle späda ut färgen. (Hälla i vatten)
Han tar 1 del färg och 5 delar vatten.**

A) Kalle späder ut hela burken hur mycket färg kan han måla med?

B) Hur många kvadratmeter kan Kalle måla om varje liter färdigblandad färg räcker till 5 m² ?

5. Hur många sekunder är $\frac{3}{5}$ av en minut?

**6. Ett paket med oxfile väger 600 gram och kostar 114 kr.
Hur mycket kostar 2 kg?**

Namn.....

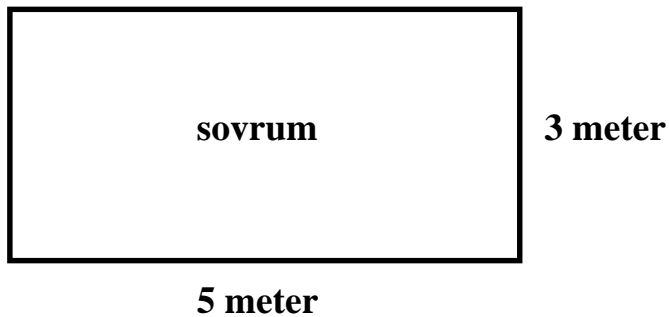
1997-11-14, (8.00 - 11.00)

Använd miniräknare.

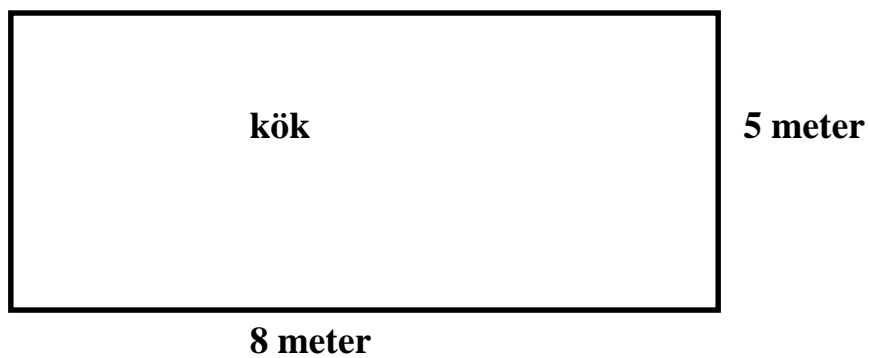
För att få rätt måste du visa hur du räknar!

- 7. En tub med Amerikansk Hamburgerdressing innehåller 220 gram dressing och kostar 13,20 kr. Vad kostar en burk på 1,5 kg om kilopriset är lika?**

8. **Kalle skall lägga ny golvmatta i sitt sovrum.
Det kostar 2 400 kr att lägga mattan.**



Hur mycket kostar det om Kalle lägger en likadan matta i köket?



- 9. I en guldgruva bryter man sten. I en gråsten, som har volymen 60 liter, finns det 2 gram guld. Hur mycket guld borde det finnas i en sten som har volymen $2,1 \text{ m}^3$?**

Enkät 1

Namn.....

Sätt en ring kring det alternativ du väljer.

1. **Var texten i uppgifterna svår att förstå?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)
2. **Var uppgifterna svåra att ställa upp?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)
3. **Var uppgifterna svåra att räkna?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)
4. **Var enheterna i uppgifterna svåra att räkna med?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)
5. **Tycker du att matematik är roligt?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)
6. **Tycker du att problemlösning är roligt?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)
7. **Skulle du kunna lösa uppgift 7 och 8 utan miniräknare?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)
8. **När du i matematiken hör ordet problemlösning, vad tänker du då på?**
(Skriv fritt, räcker inte sidan till, skriv då på baksidan)

Enkät 2

Namn.....

Välj ett alternativ och sätt en ring kring det du väljer.

1. **Var texten i uppgifterna svår att förstå?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)

2. **Var uppgifterna svåra att ställa upp?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)

3. **Var uppgifterna svåra att räkna?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)

4. **Var enheterna i uppgifterna svåra att räkna med?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)

5. **Tycker du att matematik är roligt?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)

6. **Tycker du att problemlösning är roligt?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)

7. **Skulle du kunna lösa uppgift 7, 8 och 9 utan miniräknare?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)

8. **Kommer du i framtiden att ha nytta av det här sättet att räkna på?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)

9. **Tycker du att du har lärt dej något under den här tiden?**
(JA) (NEJ) (VET EJ)

10. **När du i matematiken hör ordet problemlösning, vad tänker du då på? (Skriv fritt, räcker inte sidan till, skriv då på baksidan)**

Exempel på problemlösning

Jag vet att....

$$1 \text{ m}^3 = \dots\dots\dots \text{ liter}$$

$$1 \text{ dm}^3 = \dots\dots\dots \text{ liter}$$

$$1 \text{ m}^3 = \dots\dots\dots \text{ dm}^3$$

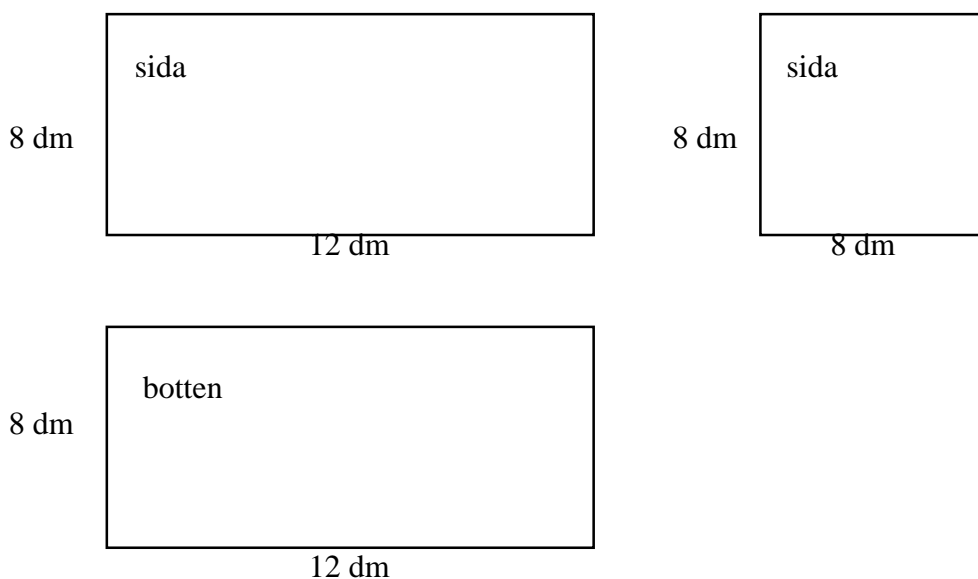
$$1 \text{ m}^2 = \dots\dots\dots \text{ dm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = \dots\dots\dots \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = \dots\dots\dots \text{ cm}^2$$

Kalles akvarium 2

Kalle skall bygga ett akvarium utan lock, glasbitarna har måtten enligt figurerna.



- a) Vad kostar det att bygga akvariet om glaset kostar 200 kr/ m² ?
- b) Hur många liter vatten ryms det i akvariet?
- c) Hur lång tid tar det att fylla akvariet om det ur en kran rinner 1440 liter vatten på en timme?

TIPS:
Vad söks?
Vad vet jag?
Hur gör jag för att få fram svaret?
Kan jag skriva om problemet med egna ord?
Räkna ut!!!
Gå tillbaka och kontrollera, är svaret rimligt, har jag räknat rätt?

Räkna på baksidan, rita, använd miniräknare om du behöver.

Exempel på räkneuppgifter

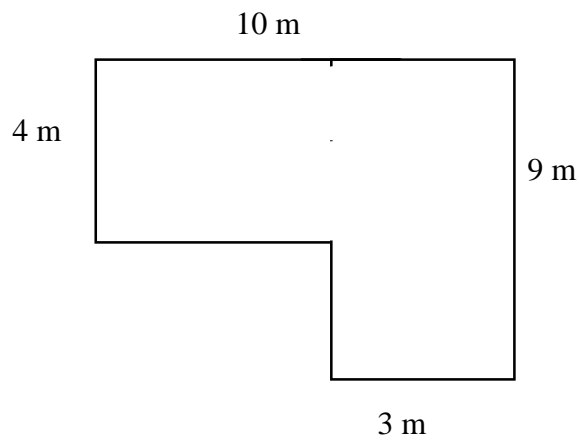
Tre varmkorvar med bröd kostar 36 kronor. Hur många varmkorvar med bröd får du för 144 kronor ?

Kalle skall bygga en mur som är 130 m lång. Det krävs 10 skottkärror med tegel för 4 meter mur. Hur många kärror krävs till hela muren ?

Ett akvarium har måtten 1m x 5dm x 6 dm. Ur en liten spricka i akvariets botten läcker det ut 12 l vatten på tre timmar. Hur länge tar det innan akvariet är helt tomt ?

Exempel på gruppdiskussionsuppgifter

Golvfärg
Just nu
125:-/ liter



Att diskutera i grupp.

**Vad kostar det att måla golvet om
4 liter täcker 20 m^2 ?**

Detta kom vi fram till:

Vad söks?

Vad vet vi?

Hur gör vi för att få fram svaret?

Kan jag skriva om problemet med egna ord?

Räkna ut!!!

Gå tillbaka och kontrollera: Är svaret rimligt? Har vi räknat rätt?

Lektions planering

Lektion 1, 8/9 - 97

1. Vi presenterar oss för klassen och berättar om vår undersökning.
2. Vi delar ut uppgifterna till vårt prov. Eleverna räknar uppgifterna, där del 1, uppgift 1-6, räknas med penna och papper, och del 2, uppgift 7 och 8, räknas med miniräknare.
3. Eleverna fyller i enkät 1.
Tid: ca. 1,5h

Lektion 2, 1/10 - 97

1. Introduktion av Regula de tri med ett kort skådespel.
2. Frågestund på olika lösningar av skådespel.
3. Utdelning av Problemlösning 1.
Tid: ca. 40 min

Lektion 3, 3/10 - 97

1. Eleverna redovisar Problemlösning 1 för varandra i sina grupper.
2. Liten genomgång på tavlan av "Jag vet att.." med tyngdpunkt på enhetsomvandling.
3. Utdelning av material till gruppuppgift. Uppgiften löses gruppvis under lektionstid. (Skruv, torx, skott, floppy).
4. Varje grupp går fram och redovisar sitt resultat. Uträkning sker på tavlan.
5. Vi samlar in Problemlösning 1.
Tid: ca 1h

6/10 - 97

Utdelning av Räkneuppgift 1.

Lektion 4, 7/10 - 97

1. Insamling av Räkneuppgift 1.
2. Genomgång av "Tips!", förklaring av varför vi skrivit detta.
3. Problemlösning 1 går igenom och där vi återkopplar till "Tips!" hela tiden. Vi frågar eleverna utifrån "Tips!", vi skriver upp på tavlan. Genomgång av "Jag vet att.." med tyngdpunkt på enhetsomvandling.
4. Genomgång av Räkneuppgift 1, exempel 1 och 2. Med samma frågor som "Tips!"
Tid ca. 40 min

Lektion 5, 8/10 - 97

1. Genomgång av Räkneuppgift 1, exempel 3 - 7. Med samma frågor som "Tips!" och där vi återkopplar till dessa hela tiden. Vi räknar och skriver upp på tavlan.
2. Utdelning av rättad Räkneuppgift 1.
3. Utdelning av Problemlösning 2.
Tid ca. 40 min

Lektion 6, 10/10 - 97

1. Eleverna redovisar Problemlösning 2 för varandra i sina grupper.
2. Efter att vi gått runt och lyssnat på gruppernas diskussion delar vi ut material till en ny uppgift i varje grupp, gruppuppgift. Uppgiften löses under lektionstid. (Bacon, Bulla, Korv, Torsk).
3. Vi bryter p.g.a. lunch.
4. Insamling av Problemlösning 2.
Tid ca: 60 min

13/10 - 97

Utdelning av Räkneuppgift 2.

14/10 - 97

Insamling av Räkneuppgift 2.

15/10 - 97

Insamling av Räkneuppgift 2, eftersläntare.

Lektion 7, 15/10 - 97

1. Genomgång av Räkneuppgift 2 på tavlan. Samma frågor som ”Tips!” och där vi återkopplar till dessa hela tiden. Vi räknar och skriver upp på tavlan. Förslag på svar från elever diskuteras i klassen. Tyngdpunkt i diskussionen på enhetsomvandlingen.
2. Utdelning av rättad Räkneuppgift 2. Positiva reaktioner på våra rättningskommentarer.
3. Utdelning av Problemlösning 3.
Tid ca. 50 min

Lektion 8, 17/10 - 97

1. Eleverna redovisar Problemlösning 3 för varandra i två grupper om 6 och 7 elever i varje.
2. Efter att vi gått runt och lyssnat på gruppernas diskussion delar vi ut material till en ny uppgift i varje grupp, gruppuppgift. Uppgiften löses under lektionstid. (Korv, Bacon)
3. Två elever ur varje grupp går igenom sin uppgift på tavlan.
4. Vi har genomgång av Problemlösning 3 på tavlan. Samma frågor som ”Tips!” och där vi återkopplar till dessa hela tiden. Vi räknar och skriver upp på tavlan. Förslag på svar från elever diskuteras i klassen. Genomgång av ”Jag vet att..” med tyngdpunkt på enhetsomvandling.
5. Insamling av Problemlösning 3.
Tid ca: 60 min

20/10 - 97

Utdelning av Räkneuppgift 3

Lektion 9, 22/10 - 97

1. Genomgång av Räkneuppgift 3 på tavlan. Samma frågor som ”Tips!” och där vi återkopplar till dessa hela tiden. Vi räknar, ritar figurer och skriver upp på tavlan. Förslag på svar från elever diskuteras i klassen. Tyngdpunkt i diskussionen ligger på talet 1(ett).
2. Utdelning av rättad Räkneuppgift 3. Fortfarande mycket positiva reaktioner på våra rättningskommentarer.
3. Utdelning av Problemlösning 4.
Tid ca. 50 min

Lektion 10, 24/10 - 97

1. Eleverna redovisar Problemlösning 4 för varandra i sina grupper.
2. Vi går runt och lyssnar på gruppernas diskussion. Vi ställer frågor utifrån ”Tips”. Det framkommer att de flesta har samma lösningsgång.
3. Liten genomgång av Problemlösning 4 på tavlan vad beträffar enhetsomvandling och areaberäkning utifrån ”Jag vet att..”.
4. Insamling av Problemlösning 4. OBS! Ingen gruppdiskussion med ny uppgift pga tidsbrist.
Tid ca. 40 min

27/10 - 97

Utdelning av Räkneuppgift 4.

28/10 -97

Insamling av Räkneuppgift 4.

Lektion 11, 29/10 - 97

1. Genomgång av Räkneuppgift 4 på tavlan. Samma frågor som ”Tips!” och där vi återkopplar till dessa hela tiden. Vi räknar, ritar figurer och skriver upp på tavlan. Förslag på svar från elever, som skrivs på tavlan, diskuteras i klassen. Tyngdpunkt i diskussionen ligger på enhetsomvandling, figurritning och uträkning mot talet ett.
2. Utdelning av rättad Räkneuppgift 4. Positiva reaktioner på våra rättningskommentarer.
3. Utdelning av Problemlösning 5.
Tid ca. 40 min

4/11 - 97

Utdelning av Räkneuppgift 5.

Lektion 12, 5/11 - 97

1. Insamling av Räkneuppgift 5.
2. Eleverna redovisar Problemlösning 5 för varandra i sina grupper.
3. Efter att vi gått runt och lyssnat på gruppernas diskussion delar vi ut material till en ny uppgift i varje grupp, gruppuppgift. Uppgiften löses under lektionstid. (Golvfärg)
4. Varje grupp redovisar sin lösning matematiskt på tavlan.
5. Vi har repeterar, efter varje grupps redovisning, vad varje grupp kommit fram till så att vi och övriga klassen förstått lösningsgången med tyngdpunkt på enheterna.
6. Insamling av Problemlösning 5.
Tid ca. 50 min

6/11 - 97

Insamling av eftersläntare till Räkneuppgift 5. Utdelning av Problemlösning 6.

Lektion 13, 7/11 - 97

1. Genomgång av Räkneuppgift 5 på tavlan. Vi utgår från ”Tips!” och skriver upp informationen i varje uppgift. Vi räknar och skriver upp på tavlan. Förslag på svar från elever diskuteras i klassen. Tyngdpunkt i diskussionen på enhetsomvandlingen och uträkning av ”ett/en”.
2. Utdelning av rättad Räkneuppgift 5. Fortfarande positiva kommentarer på våra vårt sätt att rätta.
3. Insamling av Problemlösning 6.
Tid ca. 30 min

Lektion 14, 10/11 - 97

1. Utdelning av Problemlösning 6.
2. Eleverna redovisar Problemlösning 6 för varandra i sina grupper.
3. Efter att vi gått runt och lyssnat på gruppernas diskussion delar vi ut materialet till en ny uppgift i varje grupp, gruppuppgift. Uppgifterna löses under lektionstid. (Gropen, Diket, Väggen, Golvet).
4. Varje grupp redovisar sin lösning rent matematiskt på tavlan.
5. Vi repeterar, efter varje grupps redovisning, vad varje grupp kommit fram till så att vi och övriga klassen förstått den matematiska lösningsgången.
6. Vi har kort genomgång av "Tips" med tyngdpunkt på kontroll och rimlighet.
7. Praktisk genomgång av "Gropen", samt dess rimlighet.
8. Utdelning av Räkneuppgift 6.
Tid: ca.45 min

12/11 - 97

Insamling av Räkneuppgift 6

13/11 - 97

Insamling av eftersläntare av Räkneuppgift 6.

Lektion 15, 13/11 - 97

1. Genomgång av Räkneuppgift 6 på tavlan. Vi utgår från "Tips!" och skriver upp informationen i varje uppgift. Vi räknar, ritar och skriver upp på tavlan. Förslag på svar från elever diskuteras i klassen. Tyngdpunkt i diskussionen är uträkning av "ett/en".(Blandade uppgifter)
2. Utdelning av rättad Räkneuppgift 6. Positiva kommentarer på våra vårt sätt att rätta.
3. Kort påminnelse om provet 14/11 -97
Tid: ca 40 min

Lektion 16, 14/11 - 97

1. Vi presenterar hur provet skall genomföras.
2. Vi delar ut uppgifterna till provet. Eleverna räknar uppgifterna, där del 1, uppgift 1 - 6, räknas med penna och papper, och del 2, uppgift 7 - 9, räknas med miniräknare.
3. Eleverna fyller i Enkät 2.
Tid ca. 1,5 tim

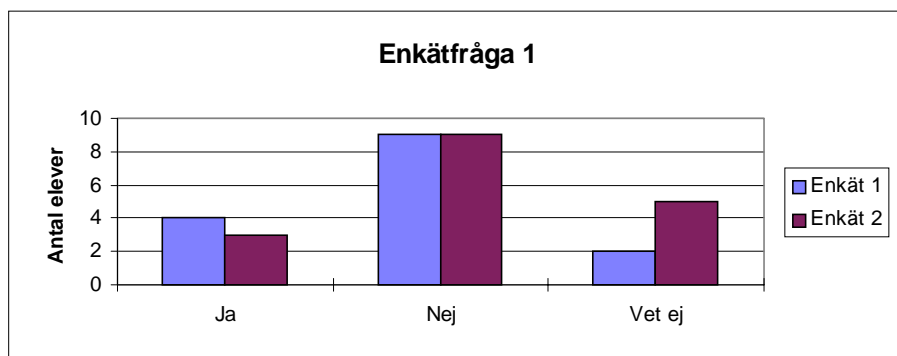
2/12 - 97

Utdelning av rättat prov.

Enkät svar

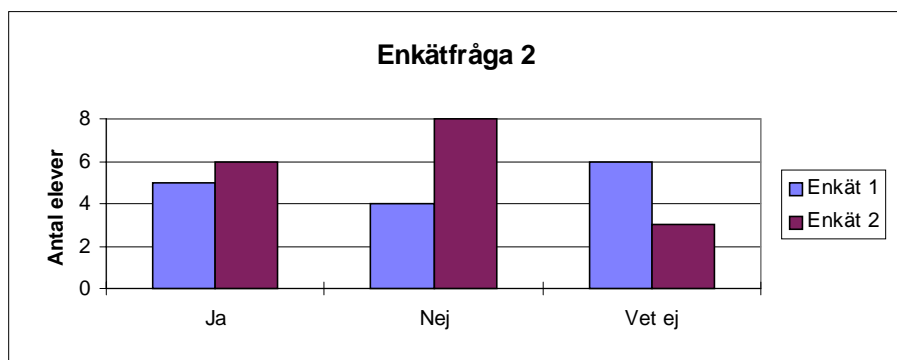
I samband med provuppgifterna har vi även genomfört attitydenkäter. Syftet med enkäterna var att undersöka elevernas begränsningar vid matematisk problemlösning. Frågorna belyser också elevernas tilltro till sina kunskaper och i viss mån även deras räknefärdighet i matematik.

De frågor som vi valt att lyfta fram är fråga 1: ”Var texten i uppgifterna svåra att förstå?” fråga 2: ”Var uppgifterna svåra att ställa upp?” samt fråga 7: ”Skulle du kunna lösa uppgift 7,8 (9) utan miniräknare?”. Orsaken till att frågan om texten i uppgiften lyfts fram är att i så stor utsträckning som möjligt undvika att eleverna begränsas matematiskt av den text som beskriver uppgiften.



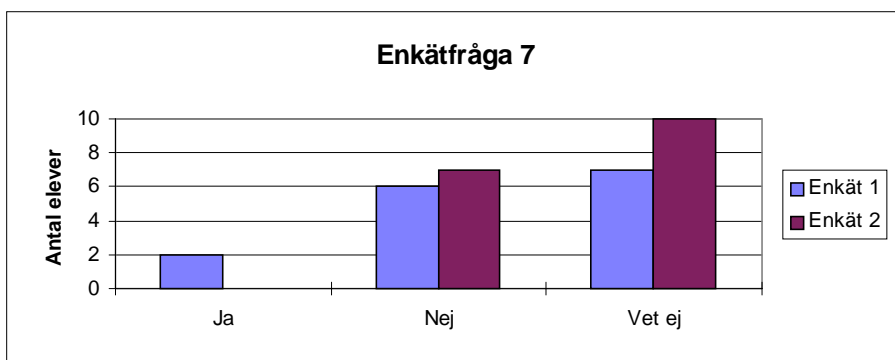
Figur 9. Resultat av elevsvar på enkätfråga 1.

Det som kan utläsas av resultatet på fråga 1 är att eleverna i liten utsträckning har problem med att läsa och förstå uppgifterna. Resultatet är i stort sett samma vid enkät 1 och vid enkät 2. Det som kan utläsas är att samma antal, troligen samma elever, inte har problem när det gäller att läsa uppgifterna.



Figur 10. Resultat av elevsvar på enkätfråga 2.

Den andra frågan som belyses är om uppställning, dvs algoritmräkning, är svår. De flesta elever svarar ”Vet ej” i enkät 1 om uppgifterna är svåra att ställa upp. En orsak till detta kan bero på att få elever klarat att algoritmiskt räkna ut ett korrekt svar. Av svaren som lämnats vid enkät 2 kan utläsas en markant förändring. Färre elever svara ”Vet ej” och fler svarar ”Nej”, dvs eleverna har troligen lärt sig att bena ut essensen ur ett problem och lärt sig metoder för algoritmuppställning. De elever som svarat ”Ja” på fråga 2 i enkät 1, dvs de elever som tycker att den matematiska uppställningen utgör ett problem, har troligtvis också svarat ”Ja” på samma fråga i enkät 2.

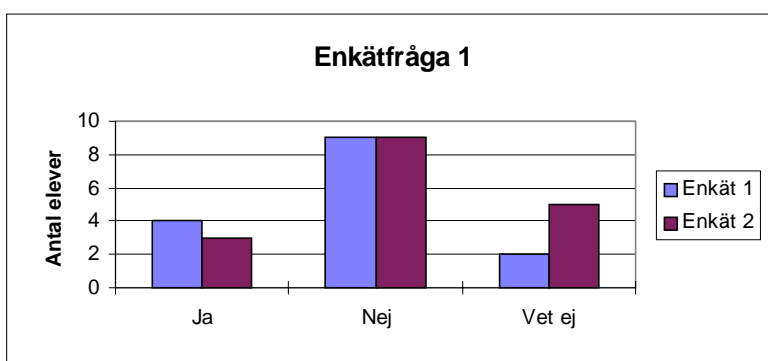


Figur 11. Resultat av elevsvar på enkätfråga 7.

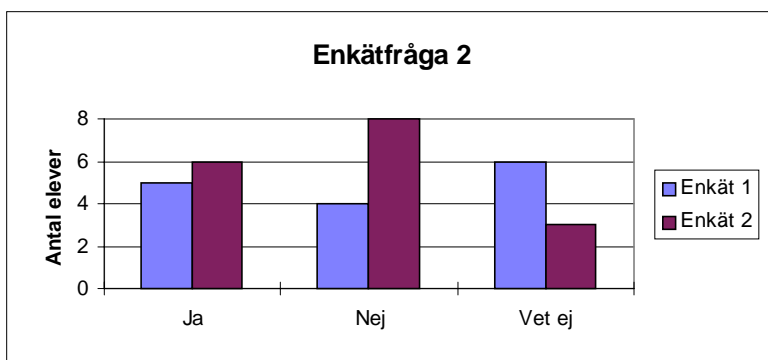
Den sista enkätfrågan som lyfts fram belyser miniräknarens betydelse vid uträkning av uppgifter. Av svaren från enkät 1 anser sig två av elever kunna lösa miniräknaruppgifterna utan hjälpmedel, sju elever vet inte och sex elever har en klar uppfattning att de inte skulle klara dessa uppgifter utan hjälpmedel. Till enkät 2 har den förändringen skett att ingen av eleverna nu anser sig kunna lösa uppgiften utan miniräknare. Antalet elever som är osäkra överstiger nu mer än halva klassen.

Resultat av enkätsvar

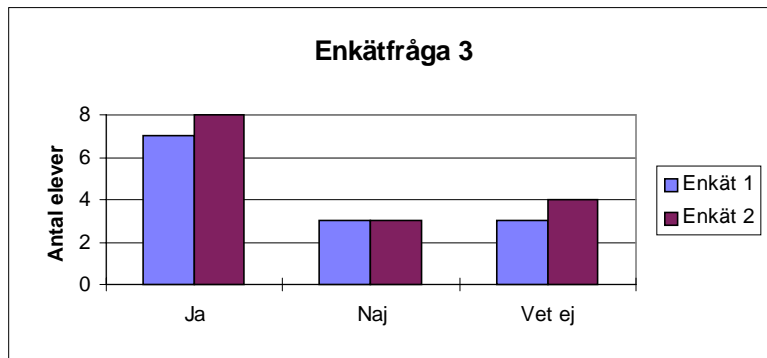
Nedanstående uppgifter är resultat av elevernas svar på enkätfrågor. I enkät 2 finns även en mindre attitydutvärdering efter vårt arbete inom detta område.



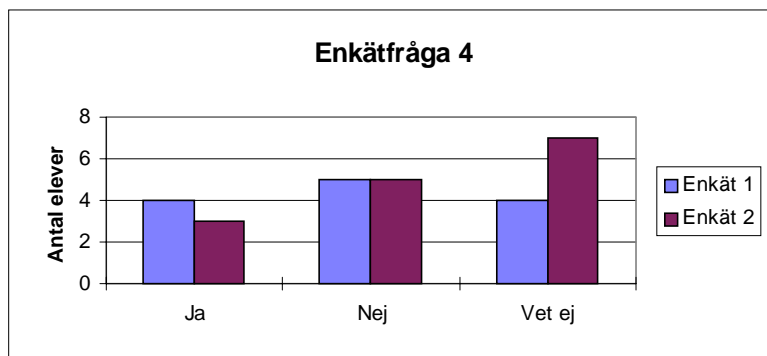
Figur 12. Antalet elever som tycker att texten i uppgifterna är svår att förstå.



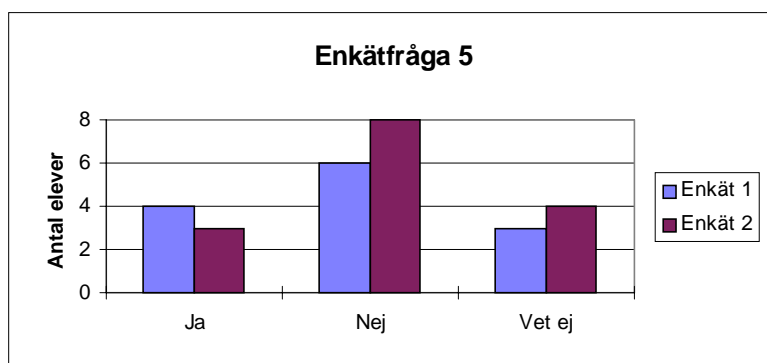
Figur 13. Antalet elever som tycker att uppgifterna är svåra att ställa upp.



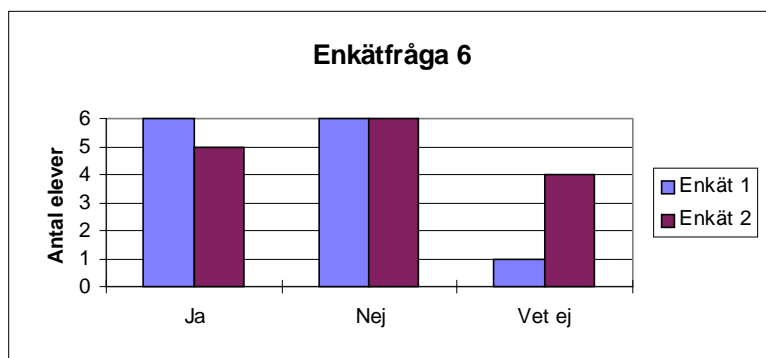
Figur 14. Antalet elever som tycker att uppgifterna svåra att räkna.



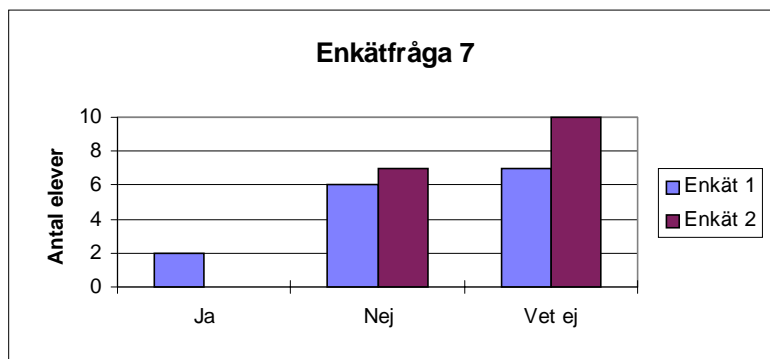
Figur 15. Antalet elever som tycker att enheterna i uppgifterna är svåra att räkna med.



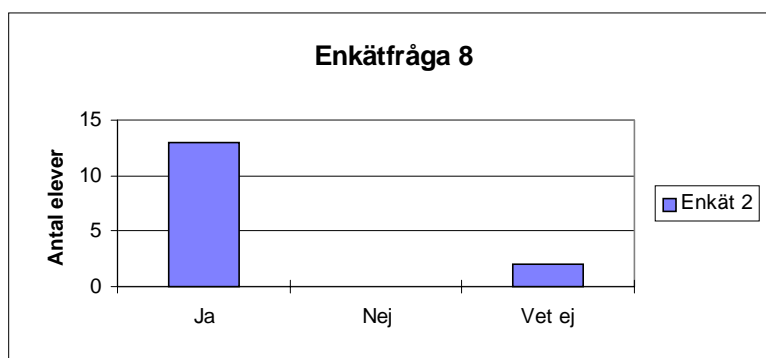
Figur 16. Antalet elever som tycker att matematik är roligt.



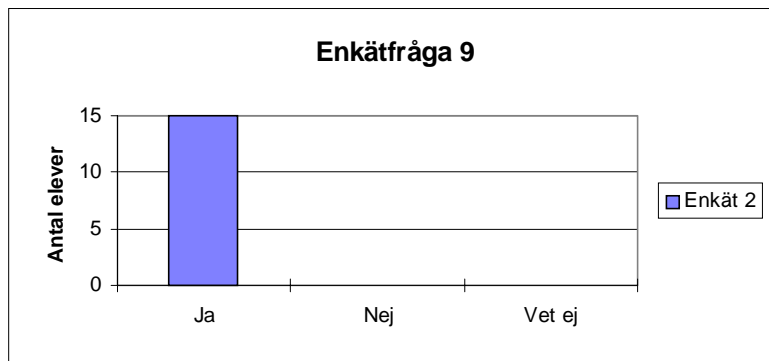
Figur 17. Antalet elever som tycker att problemlösning är roligt.



Figur 18. Antalet elever som anser sig kunna lösa uppgift 7 och 8 (9) utan miniräknare



Figur 19. Antalet elever som anser att de kommer att ha nytta av detta sätt att räkna på.



Figur 20. Antalet elever som tycker att det lärt sig något under vår praktikperiod.

Lästips

- Ahlberg, A. (1992). *Att möta matematiska problem*. Göteborg: Acta Univers.
ISBN 91-7346-250-0
- Anderberg, B. (1992). *Matematikmetodik i grundskolan. 1-2 Grundläggande färdigheter och mera matematik*. Stockholm: Bengt Anderberg Läromedel. ISBN 91-970563-6-7
- Boswood Ballard, P. (1928). *Teaching the essentials of arithmetic*. London: University of London Press LTD
- Eklund, Jylltorp, Skoogh, Wettergren. (1975). *Matematik i tillämpning*. Stockholm: Skolöverstyrelsen och LiberLäromedel. ISBN 91-47-01501-2
- Ekvall, G. (1979). *Kreativitet och kreativ problemlösning*. Uddevalla: Parådet.
ISBN 91-7116-112-0
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.). (1991). *Tal och räkning 1*. Lund: Utbildningsradion och Studentlitteratur. ISBN 91-44-34681-6
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.). (1991). *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur och Utbildningsradion. ISBN 91-44-35391-X
- Föreningen för svensk undervisningshistoria. (1994). *Årsbok i svensk undervisnings historia, Aurelius räkelära från 1614*. Uppsala. ISBN 91-85130-50-8
- Håstad, M. (1982/1983). Perspektiv på problemlösning. *Nämnan Nr 3*. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget. ISBN 91-40-70864-0
- Johansson, H. (1997). *EXAMENSARBETEN, Luleåmodellen för lärarutbildningarna*. Luleå: Luleå Tekniska Universitet.
- Kilborn, W. (1979). *PUMP-projektet. Bakgrund och erfarenheter. Utbildningsforskning FoU Rapport 37*. Stockholm: Skolöverstyrelsen, Liber UtbildningsFörlaget.
ISBN 91-40-70269-2
- Kommentarmaterial Lgr 80 Skolöverstyrelsen. (1982). *Att räkna. En grundläggande färdighet*. Stockholm: Liber Utbildningsförlag. IBSN 91-40-70802-0
- Silver, Edward A. (1985). *Teaching and learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. NJ U.S.A: Lawrence Erlbaum Associates. ISBN 0-89859-681-5
- Wyndhamn, J. (1982). *Pedagogiskt utvecklings arbete*. Linköping: Universitetet i Linköping 1982:77.